KURIKULUM STANDARD SEKOLAH MENENGAH

MATEMATIK TAMBAHAN

TINGKATAN 4

Penulis

Dr. Wong Mee Kiong
Zaini bin Musa
Azizah binti Kamar
Saripah binti Ahmad
Nurbaiti binti Ahmad Zaki
Zefry Hanif bin Burham@Borhan

Editor

Izyani binti Ibrahim
Nur Marliesa Atiera binti Zakaria

Pereka Bentuk

Ng Peck Foong

Ilustrator

Ng Ying Tong

PAN ASIA PUBLICATIONS SDN. BHD.
2019

KEMENTERIAN
PENDIDIKAN
MALAYSIA

NO. SIRI BUKU: 0115

KPM2019 ISBN 978-967-466-377-3
Cetakan Pertama 2019

Diterbitkan untuk Kementerian Pendidikan Malaysia oleh:
Pan Asia Publications Sdn. Bhd. (226902-X)
No. 2-16, Jalan SU 8,
Taman Perindustrian Subang Utama,
Seksyen 22, 40300 Shah Alam,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: +603-5614 4168
Faks: +603-5614 4268
E-mel: enquiry@panasiapub.com
Laman sesawang: www.panasiapub.com

Reka Letak dan Atur Huruf:
Pan Asia Publications Sdn. Bhd. (226902-X)
Muka Taip Teks: Times
Saiz Taip Teks: 11 poin

Dicetak oleh:
Herald Printers Sdn. Bhd. (19965-V)
Lot 508, Jalan Perusahaan 3,
Bandar Baru Sungai Buloh,
47000 Selangor Darul Ehsan.

Penghargaan

Pihak penerbit dan para penulis ingin merakamkan setinggi-tinggi penghargaan dan terima kasih kepada semua pihak yang berikut:

- Jawatankuasa Penambahbaikan Pruf Muka Surat, Bahagian Sumber dan Teknologi Pendidikan, Kementerian Pendidikan Malaysia
- Jawatankuasa Penyemakan Pembetulan Pruf Muka Surat, Bahagian Sumber dan Teknologi Pendidikan, Kementerian Pendidikan Malaysia
- Jawatankuasa Penyemakan Naskhah Sedia Kamera, Bahagian Sumber dan Teknologi Pendidikan, Kementerian Pendidikan Malaysia
- Pegawai-pegawai Bahagian Sumber dan Teknologi Pendidikan dan Bahagian Pembangunan Kurikulum, Kementerian Pendidikan Malaysia
- Pengerusi serta ahli panel penilaian dan peningkatan mutu
- Bahagian Editorial dan Bahagian Produksi
- *GeoGebra*
- Desmos
- Semua individu yang terlibat secara langsung atau tidak langsung dalam penghasilan buku teks Matematik Tambahan Tingkatan 4 ini.

Kandungan

Pendahuluan

Buku Teks Matematik Tambahan Tingkatan 4 KSSM ini ditulis berdasarkan Dokumen Standard Kurikulum dan Pentaksiran (DSKP) Matematik Tambahan Tingkatan 4. Kurikulum Standard Sekolah Menengah (KSSM) Matematik Tambahan bermatlamat untuk membentuk individu yang berfikrah matematik, kreatif dan inovatif serta berketerampilan.

Kandungan buku teks ini menyepadukan enam tunjang kerangka KSSM, mengintegrasikan pengetahuan, kemahiran dan nilai serta menerapkan secara eksplisit Kemahiran Abad Ke-21 dan Kemahiran Berfikir Aras Tinggi (KBAT). Buku teks ini menggabungjalinkan kepelbagaian strategi pengajaran dan pembelajaran yang membolehkan murid memahami kandungan secara mendalam serta mengasah pemikiran ke aras yang lebih tinggi. Melalui penggunaan buku ini secara menyeluruh, murid akan terlibat secara aktif melalui pembelajaran berasaskan inkuiri yang melibatkan pengalaman, penyiasatan dan penerokaan.

Elemen Merentas Kurikulum (EMK) seperti penggunaan bahasa pengantar yang betul, nilai-nilai murni, semangat patriotik, literasi sains dan teknologi, kreativiti dan inovasi, keusahawanan, teknologi maklumat dan pendidikan kewangan diterapkan secara menyeluruh dalam penghasilan kandungan buku teks ini. Pendekatan STEM juga diaplikasikan dalam buku ini sebagai persediaan murid untuk menghadapi cabaran dan berdaya saing di peringkat global.

Ciri-ciri Istimewa dalam Buku ini dan Fungsinya

Halaman Rangsangan

- Mengandungi foto yang menarik dan teks yang berkaitan dengan kehidupan seharian yang merangsang pemikiran murid.
- Mengandungi Standard Kandungan dalam 'Apakah yang akan dipelajari?', tujuan pembelajaran dalam 'Signifikan bab ini', sejarah atau informasi am mengenai bab dalam 'Tahukah Anda?' dan Kata Kunci dalam dwibahasa.

	Kod *QR* pada kulit depan buku mengandungi huraian tema buku, biodata penulis serta maklumat dan fakta yang dikemas kini (sekiranya ada).
INKUIRI / Berpasangan Berkumpulan Individu	Aktiviti yang melibatkan murid secara individu, berpasangan atau berkumpulan yang menggalakkan murid terlibat secara aktif dalam proses pembelajaran.
Latih Diri 1.1	Menyediakan soalan-soalan untuk menguji kefahaman murid mengenai konsep yang dipelajari.
Latihan Intensif 1.1	Mengandungi soalan-soalan untuk menentukan penguasaan murid terhadap topik yang dipelajari.

APLIKASI MATEMATIK	Memberi soalan penyelesaian masalah berserta langkah kerja yang merangkumi situasi kehidupan sebenar.
IMBAS KEMBALI	Menunjukkan info yang telah dipelajari oleh murid.
Cabar Minda	Mengemukakan soalan yang memerlukan murid untuk berfikir secara kreatif dan menguji penguasaan murid.
Muzium Matematik	Memberi penerangan mengenai sejarah perkembangan matematik dan sumbangan tokoh-tokoh matematik.
SUMBANG SARAN	Menyediakan aktiviti-aktiviti yang memerlukan perbincangan antara murid.
PANTAS KIRA	Menerangkan cara penggunaan kalkulator saintifik dalam pengiraan matematik.
Celik Teknologi	Memberi pendedahan kepada murid mengenai aplikasi teknologi dalam pembelajaran matematik.
QR	Memberi pendedahan kepada murid menggunakan peranti mudah alih dengan mengimbas kod *QR* untuk mendapatkan maklumat tambahan.
TIP PINTAR	Memberi tip-tip matematik yang berkaitan dengan topik untuk kegunaan murid.
Kaedah Alternatif	Mencadangkan penyelesaian alternatif untuk soalan-soalan tertentu.
POKET MATEMATIK	Memberi info tambahan kepada murid untuk lebih menguasai topik yang dipelajari.
RUMUSAN BAB	Rangkuman keseluruhan mengenai bab yang telah dipelajari.
TULIS JURNAL ANDA	Mengaplikasi konsep-konsep yang telah dipelajari dalam kehidupan seharian.
Penerokaan MATEMATIK	Aktiviti ringkas yang berkaitan dengan topik yang dipelajari.
LATIHAN PENGUKUHAN	Merangkumi soalan berbentuk KBAR dan KBAT untuk menguji kefahaman murid.
	Merupakan soalan KBAT untuk merangsang kemahiran berfikir aras tinggi murid.
PAK-21	Menggunakan konsep pembelajaran abad ke-21 untuk meningkatkan pemahaman murid.
1.1.2	Menunjukkan standard pembelajaran untuk setiap bab.
TP1	Menunjukkan tahap penguasaan bagi setiap soalan.

Rumus

Bab 2 Fungsi Kuadratik

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bab 4 Indeks, Surd dan Logaritma

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$
$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$
$$\log_a mn = \log_a m + \log_a n$$
$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$
$$\log_a m^n = n \log_a m$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Bab 5 Janjang

Janjang aritmetik

$$T_n = a + (n-1)d$$
$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

Janjang geometri

$$T_n = ar^{n-1}$$
$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, |r| < 1$$
$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, |r| > 1$$
$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}, |r| < 1$$

Bab 7 Geometri Koordinat

Pembahagi tembereng garis

$$= \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$$

Luas segi tiga

$$= \frac{1}{2}\left|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right|$$

Luas sisi empat

$$= \frac{1}{2}\left|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\right|$$

Bab 8 Vektor

$$|\underset{\sim}{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\hat{\underset{\sim}{r}} = \frac{\underset{\sim}{r}}{|\underset{\sim}{r}|}$$

Bab 9 Penyelesaian Segi Tiga

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ kos } A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{ kos } B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ kos } C$$

Luas segi tiga

$$= \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$$

Rumus Heron

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, s = \frac{a+b+c}{2}$$

Bab 10 Nombor Indeks

$$I = \frac{Q_1}{Q_0} \times 100$$
$$\bar{I} = \frac{\Sigma I_i w_i}{\Sigma w_i}$$

bit.ly/2Mz09bt

Muat turun aplikasi percuma imbasan kod *QR* daripada *Google Play*, *App Store* atau layaran lain ke peranti mudah alih pintar anda. Imbas kod *QR* dengan aplikasi itu atau layari laman sesawang yang tertera di sebelah kiri untuk muat turun fail PDF, *GeoGebra* dan jawapan lengkap. Kemudian, simpan fail yang dimuat turun bagi kegunaan luar talian.

BAB 1 Fungsi

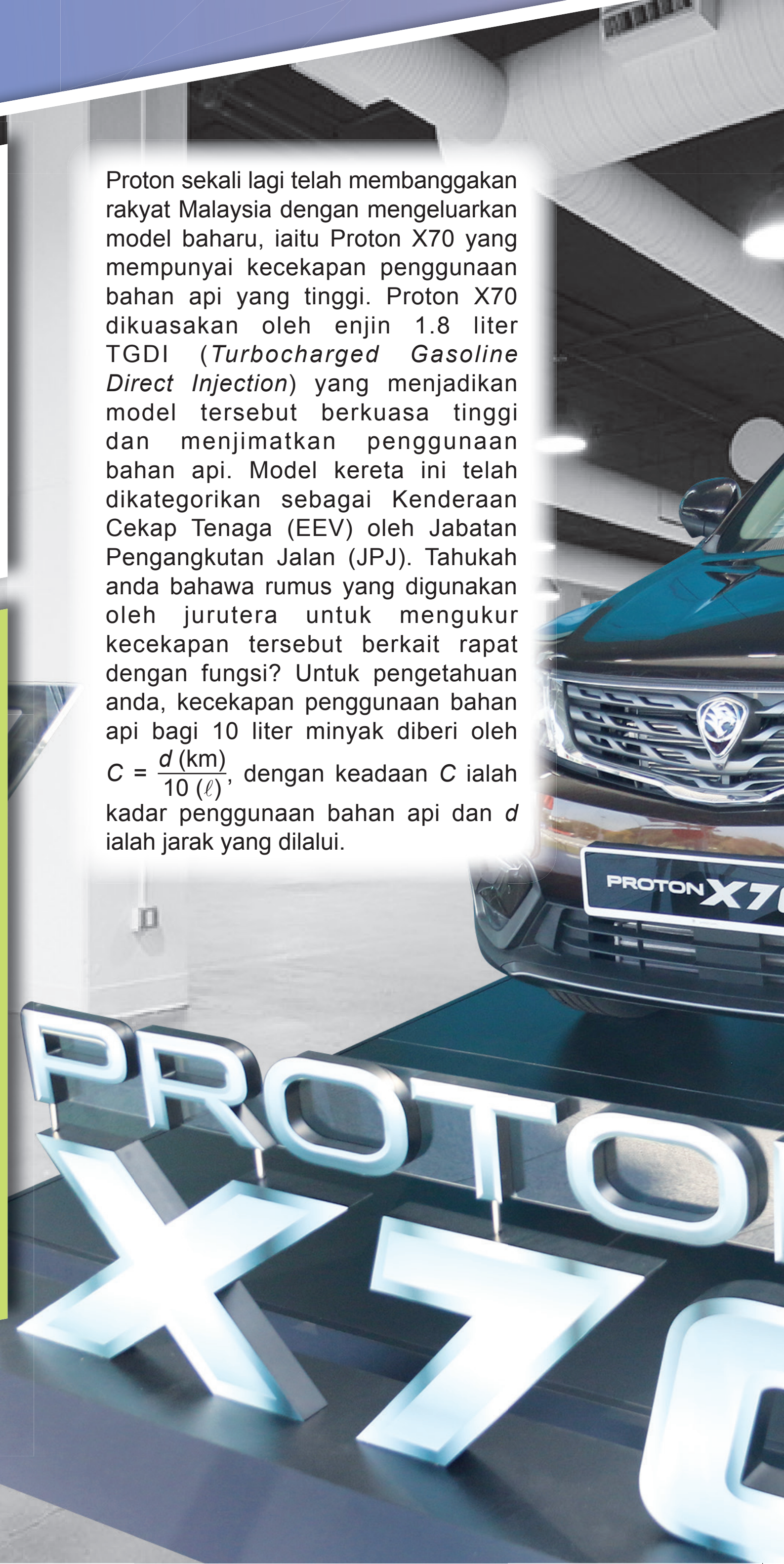
Apakah yang akan dipelajari?

- Fungsi
- Fungsi Gubahan
- Fungsi Songsang

Senarai Standard Pembelajaran

bit.ly/2LKribm

Proton sekali lagi telah membanggakan rakyat Malaysia dengan mengeluarkan model baharu, iaitu Proton X70 yang mempunyai kecekapan penggunaan bahan api yang tinggi. Proton X70 dikuasakan oleh enjin 1.8 liter TGDI (*Turbocharged Gasoline Direct Injection*) yang menjadikan model tersebut berkuasa tinggi dan menjimatkan penggunaan bahan api. Model kereta ini telah dikategorikan sebagai Kenderaan Cekap Tenaga (EEV) oleh Jabatan Pengangkutan Jalan (JPJ). Tahukah anda bahawa rumus yang digunakan oleh jurutera untuk mengukur kecekapan tersebut berkait rapat dengan fungsi? Untuk pengetahuan anda, kecekapan penggunaan bahan api bagi 10 liter minyak diberi oleh $C = \dfrac{d\ (\text{km})}{10\ (\ell)}$, dengan keadaan C ialah kadar penggunaan bahan api dan d ialah jarak yang dilalui.



Kata Kunci

Tatatanda fungsi	*Function notation*
Fungsi tidak tertakrif	*Undefined function*
Fungsi nilai mutlak	*Absolute value function*
Ujian garis mencancang	*Vertical line test*
Gambar rajah anak panah	*Arrow diagram*
Objek	*Object*
Imej	*Image*
Domain	*Domain*
Kodomain	*Codomain*
Julat	*Range*
Fungsi diskret	*Discrete function*
Fungsi selanjar	*Continuous function*
Fungsi gubahan	*Composite function*
Fungsi songsang	*Inverse function*
Ujian garis mengufuk	*Horizontal line test*

Tahukah Anda?

Perkataan fungsi mula diperkenalkan oleh ahli matematik Perancis, Rene Descartes pada tahun 1637. Menurutnya, fungsi ialah sebarang kuasa positif integer bagi pemboleh ubah *x*.

Leonhard Euler (1707-1783), ahli matematik Switzerland pula menyatakan bahawa fungsi ialah sebarang persamaan atau rumus yang melibatkan pemboleh ubah dan pemalar. Ideanya tentang fungsi ini serupa dengan fungsi yang dipelajari sekarang.

Untuk maklumat lanjut:

bit.ly/2Lk8SBI

SIGNIFIKAN BAB INI

Fungsi menyediakan model matematik yang mudah dan tepat untuk mewakili suatu situasi dan menyelesaikan masalah yang dihadapi di sekeliling kita. Misalnya:

- Tinggi seseorang, *h* adalah fungsi bagi panjang tulang pahanya, *f*. Dengan menggantikan nilai *f* ke dalam fungsi *h*, pakar forensik dapat menganggar ketinggian mayat berdasarkan panjang tulang pahanya.
- Pegawai bank menggunakan konsep fungsi untuk mengira faedah yang dikenakan bagi suatu pinjaman dan seterusnya mengira pembayaran secara ansuran dalam pembelian rumah, kenderaan, pinjaman peribadi atau perniagaan pelanggannya.

Imbas kod *QR* ini untuk menonton video mengenai Proton X70.

bit.ly/2Rnu0Zh

1.1 Fungsi

Dalam kehidupan seharian, terdapat banyak kuantiti yang bergantung kepada satu atau lebih pemboleh ubah. Teliti dan fahami situasi yang berikut:

Anda bekerja sebagai juruwang sambilan dan anda dibayar RM80 sehari. Jumlah upah yang diperoleh ditentukan oleh bilangan hari anda bekerja.

Anda membeli durian di sebuah gerai. Jika harga sekilogram durian ialah RM8, jumlah wang yang perlu anda bayar bergantung kepada jisim durian yang anda beli.

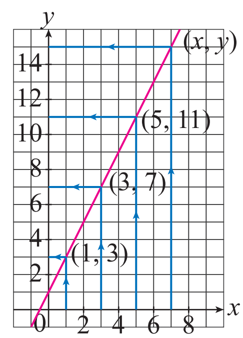
Dalam matematik, situasi seperti ini ialah contoh-contoh bagi suatu fungsi. Daripada contoh situasi ini, dapatkah anda nyatakan maksud fungsi?

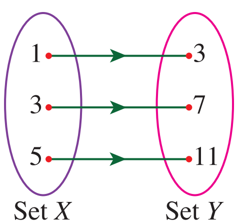
Menerangkan fungsi menggunakan perwakilan grafik dan tatatanda

Perhatikan graf $y = 2x + 1$ di sebelah. Hubungan antara nilai 1 pada paksi-x dan nilai 3 pada paksi-y boleh ditulis sebagai $1 \rightarrow 3$. Ini menunjukkan bahawa 1 ialah unsur pertama dan 3 ialah unsur terakhir.

Dalam hal ini, kita boleh katakan bahawa 1 dipetakan kepada 3. Begitu juga dengan $3 \rightarrow 7$, $5 \rightarrow 11$ dan seterusnya. Setiap titik (x, y) pada garis adalah berpadanan dengan pemetaan $x \rightarrow y$ yang memetakan nilai x pada paksi-x kepada nilai y pada paksi-y.

Hubungan antara sebahagian daripada pemetaan $x \rightarrow y$ boleh diwakili oleh gambar rajah anak panah seperti di bawah.





Setiap unsur x dalam set X dipetakan kepada hanya satu unsur y dalam set Y.

Maka, hubungan seperti ini dikenali sebagai **fungsi** atau **pemetaan**.

Secara amnya:

Fungsi dari set X kepada set Y ialah hubungan khas yang memetakan setiap unsur $x \in X$ kepada hanya satu unsur $y \in Y$.

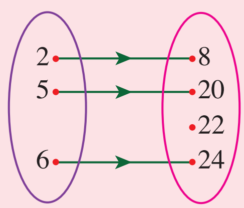
Jika f menandakan fungsi dari set $X = \{1, 3, 5\}$ kepada set $Y = \{3, 7, 11\}$ yang ditakrifkan oleh $f: 1 \rightarrow 3, f: 3 \rightarrow 7$ dan $f: 5 \rightarrow 11$, unsur 1 dikenali sebagai objek dan unsur 3 ialah imejnya. Begitu juga 7 dan 11 masing-masing ialah imej bagi 3 dan 5. Mana-mana unsur x dalam set X yang dipetakan kepada satu unsur y dalam set Y oleh $y = 2x + 1$ ditulis dengan tatatanda seperti berikut:

$f: x \rightarrow y$ atau $f(x) = y$
$f: x \rightarrow 2x + 1$ atau $f(x) = 2x + 1$
dengan x ialah objek dan $2x + 1$ ialah imej

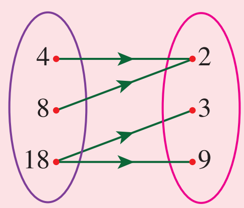
Contoh 1

Adakah hubungan yang berikut suatu fungsi? Jelaskan.

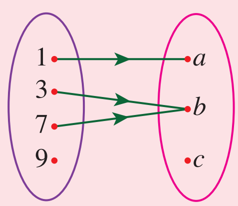
(a)



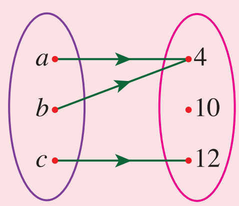
(b)



(c)



(d)



Penyelesaian

(a) Hubungan ini ialah fungsi kerana setiap objek mempunyai satu imej sahaja walaupun unsur 22 tidak mempunyai objek.

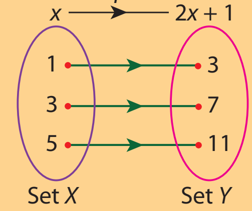
(b) Hubungan ini bukan fungsi kerana tidak memenuhi syarat fungsi, iaitu setiap objek hanya mempunyai satu imej sahaja. Perhatikan 18 mempunyai dua imej, iaitu $18 \rightarrow 3$ dan $18 \rightarrow 9$.

(c) Hubungan ini bukan fungsi kerana tidak memenuhi syarat fungsi, iaitu setiap objek mesti mempunyai satu imej sahaja. Perhatikan 9 tidak mempunyai imej.

(d) Hubungan ini ialah fungsi kerana setiap objek mempunyai satu imej sahaja walaupun unsur 10 tidak mempunyai objek.

POKET MATEMATIK

- $f: x \rightarrow 2x + 1$ dibaca sebagai "fungsi f memetakan x kepada $2x + 1$".
- $f(x) = 2x + 1$ dibaca sebagai "$2x + 1$ ialah imej bagi x di bawah fungsi f" atau "fungsi f bagi x ialah sama dengan $2x + 1$".
- $x \xrightarrow{f} 2x + 1$

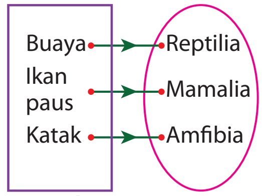


dibaca sebagai "$2x + 1$ bagi 1 ialah 3" dan seterusnya.

IMBAS KEMBALI

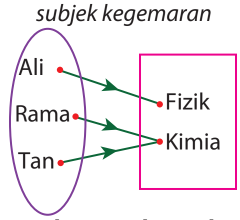
Fungsi ialah hubungan satu dengan satu atau hubungan banyak dengan satu.

kelas haiwan



Hubungan satu dengan satu

subjek kegemaran

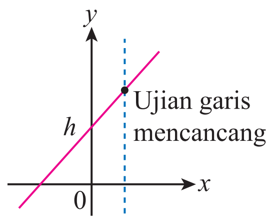


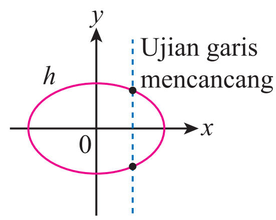
Hubungan banyak dengan satu

1.1.1

Bagaimanakah kita dapat menentukan bahawa graf bagi suatu hubungan ialah fungsi? Apabila diberi suatu graf, kita boleh menggunakan **ujian garis mencancang** untuk menentukan sama ada graf tersebut ialah fungsi atau bukan. Jika garis mencancang memotong graf hanya pada satu titik, maka hubungan itu merupakan fungsi. Sebaliknya, jika garis mencancang itu tidak memotong mana-mana titik pada graf atau memotong lebih daripada satu titik, maka graf itu bukan fungsi.

Graf h ialah fungsi.



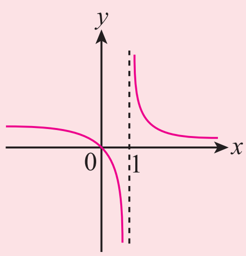


Graf h bukan fungsi.

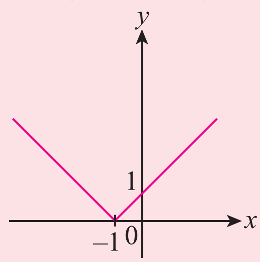
Contoh 2

Antara graf berikut, yang manakah menunjukkan fungsi?

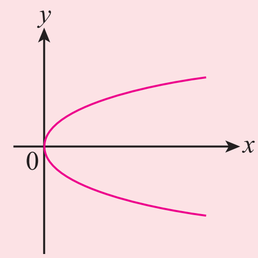
(a)



(b)

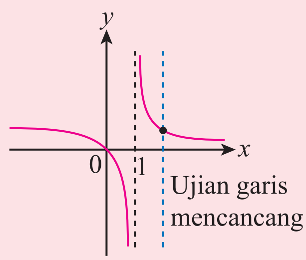


(c)

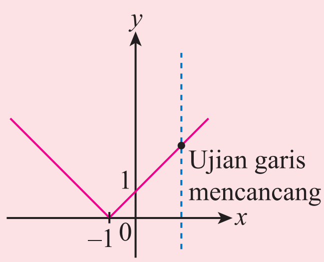


Penyelesaian

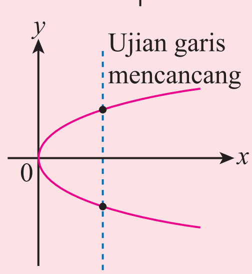
(a) Graf ini ialah suatu fungsi kerana apabila diuji dengan garis mencancang, garis itu memotong graf hanya pada satu titik sahaja kecuali pada $x = 1$ yang tidak memotong mana-mana titik pada graf.



(b) Graf ini ialah suatu fungsi kerana apabila diuji dengan garis mencancang, garis itu memotong graf hanya pada satu titik sahaja.



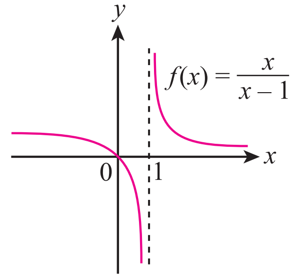
(c) Graf ini bukan suatu fungsi kerana apabila diuji dengan garis mencancang, garis itu memotong dua titik pada graf.



Cabar Minda

Berapakah bilangan pintasan-x dan pintasan-y yang boleh wujud pada graf suatu fungsi?

Perhatikan semula graf dalam Contoh 2(a). Graf tersebut ialah graf bagi fungsi $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$. Daripada graf dalam Rajah 1.1, kita dapati apabila $x \to 1^-$, iaitu x menghampiri 1 dari sebelah kiri, $f(x) \to -\infty$, iaitu nilai $f(x)$ semakin berkurang tanpa sempadan. Apabila $x \to 1^+$, iaitu x menghampiri 1 dari sebelah kanan, $f(x) \to \infty$, iaitu nilai $f(x)$ semakin meningkat tanpa sempadan. Keadaan ini bermaksud, graf hanya menghampiri tetapi tidak menyentuh garis $x = 1$. Jadi, fungsi ini ialah fungsi tidak tertakrif pada $x = 1$.



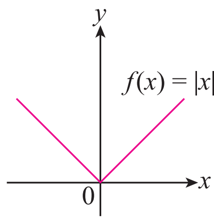
Rajah 1.1

Perhatikan pula graf dalam Contoh 2(b). Graf tersebut ialah graf bagi fungsi nilai mutlak $f(x) = |x + 1|$. Ungkapan nilai mutlak $|x|$ ialah nilai berangka bagi x dan ditakrifkan oleh:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ jika } x \geqslant 0 \\ -x \text{ jika } x < 0 \end{cases}$$

Jadi, apabila $x = -2$, $|-2| = -(-2)$
$= 2$

dan apabila $x = 2$, $|2| = 2$.



Rajah 1.2

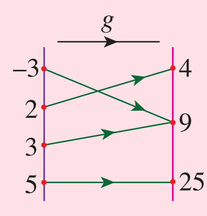
Fungsi yang ditakrifkan oleh $f(x) = |x|$ mempunyai graf berbentuk V dengan bucu pada (0, 0) seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 1.2. $|x|$ dibaca sebagai "modulus bagi x".

POKET MATEMATIK

Berdasarkan Rajah 1.1:
- $x \to 1^-$ bermaksud x menghampiri 1 dari sebelah kiri pada graf $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $x < 1$.
- $x \to 1^+$ bermaksud x menghampiri 1 dari sebelah kanan pada graf $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $x > 1$.

Contoh 3

Berdasarkan rajah di sebelah, tulis hubungan bagi fungsi g menggunakan tatatanda fungsi.



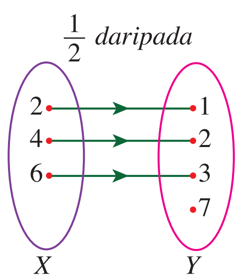
Penyelesaian

Tatatanda untuk fungsi tersebut ialah $g : x \to x^2$ atau $g(x) = x^2$.

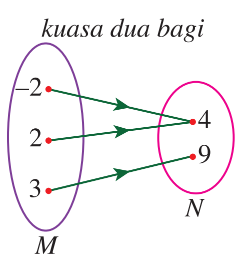
Latih Diri 1.1

1. Nyatakan sama ada hubungan yang berikut ialah fungsi atau bukan. Beri alasan anda.

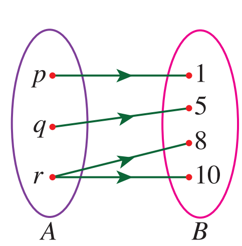
(a)



(b)

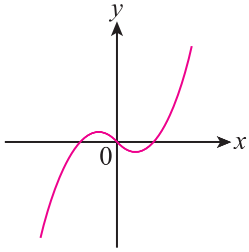


(c)

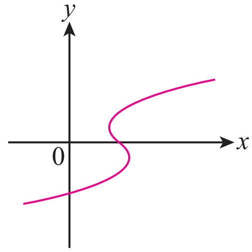


2. Tentukan sama ada graf yang berikut ialah fungsi atau bukan dengan menggunakan ujian garis mencancang.

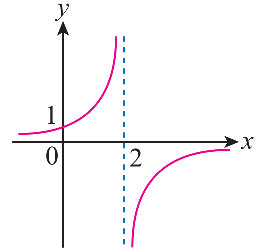
(a)



(b)

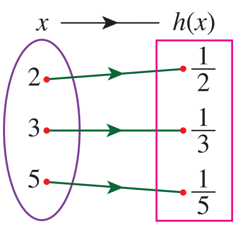


(c)

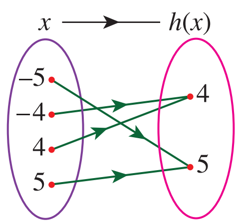


3. Dengan menggunakan tatatanda fungsi, ungkapkan h dalam sebutan x bagi setiap gambar rajah anak panah yang berikut.

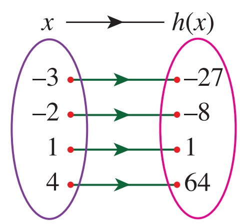
(a)



(b)



(c)



Menentukan domain dan julat bagi suatu fungsi

INKUIRI 1 Berkumpulan PAK-21

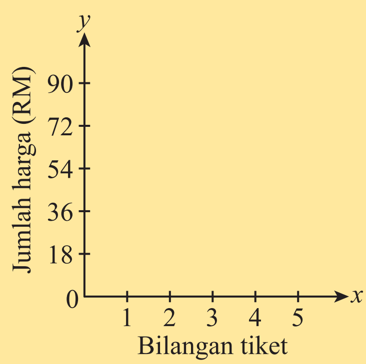
Tujuan: Meneroka domain dan julat suatu fungsi diskret dan selanjar

Arahan:

1. Setiap kumpulan dikehendaki memilih satu situasi yang berikut.

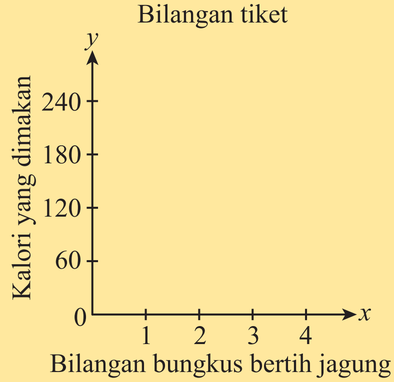
Situasi I

Fungsi $y = 18x$ mewakili harga tiket, dalam RM, bagi x keping tiket yang dibeli oleh sebuah keluarga untuk menonton tayangan filem. Lukiskan graf fungsi untuk pembelian 1 hingga 5 keping tiket.

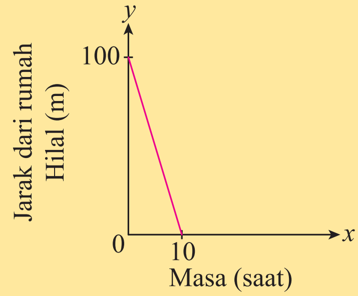


Situasi II

Sebungkus bertih jagung mengandungi 60 kalori. y kalori adalah fungsi bagi bilangan x bungkus bertih jagung yang dimakan. Lukiskan graf bagi fungsi untuk pembelian 1 hingga 4 bungkus bertih jagung.



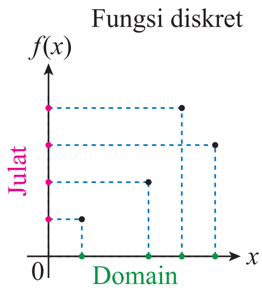
Situasi III
Hilal berbasikal sejauh 100 m dari rumah rakannya dengan laju 10 m s^{-1}. Dengan laju yang sama, Hilal ke rumah rakannya semula untuk mengambil buku yang tertinggal. Lengkapkan graf jarak-masa bagi perjalanan Hilal.

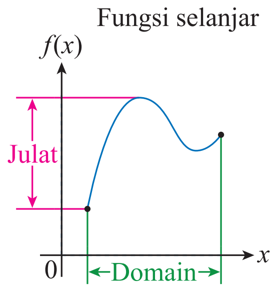


2. Berdasarkan graf yang dibina, bincang bersama-sama ahli kumpulan anda dan jawab soalan yang berikut.
(a) Adakah graf bagi fungsi yang dipilih diskret atau selanjar? Jelaskan.
(b) Kenal pasti domain dan julat bagi graf fungsi tersebut.
3. Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas.

Hasil daripada Inkuiri 1, didapati bahawa titik-titik pada graf fungsi diskret adalah nyata dan terpisah serta tidak bersambung dengan garis atau lengkung. Pada graf fungsi selanjar pula, titik-titik disambungkan dengan garis lurus atau lengkung dalam selang tertentu. Jadi, Situasi I mewakili fungsi diskret manakala Situasi II dan III mewakili fungsi selanjar.

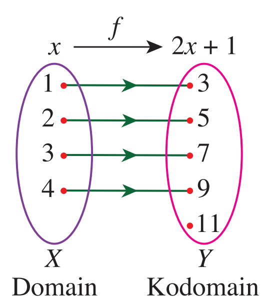
Secara amnya, domain bagi suatu fungsi ialah set nilai x yang mungkin, yang membuatkan suatu fungsi tertakrif manakala julat pula ialah set nilai y yang diperoleh selepas menggantikan semua nilai x yang mungkin itu.





Perhatikan gambar rajah anak panah bagi fungsi diskret f dalam Rajah 1.3. Dalam fungsi ini, unsur-unsur dalam set X masing-masing dihubungkan dengan suatu unsur tertentu dalam set Y.

Set unsur X, iaitu nilai-nilai x yang boleh digantikan ke dalam f dinamakan **domain** manakala set unsur dalam Y, iaitu nilai-nilai yang mungkin muncul bagi fungsi f dinamakan **kodomain**. Set unsur dalam Y yang dipetakan dari X, iaitu nilai-nilai yang sebenarnya muncul bagi fungsi f dinamakan **julat**.



Rajah 1.3

Maka, kita peroleh
Domain = {1, 2, 3, 4}
Kodomain = {3, 5, 7, 9, 11}
Julat = {3, 5, 7, 9}

Pertimbangkan pula fungsi selanjar $f(x) = 2x + 1$ yang boleh mengambil semua nilai x dari 1 hingga 4. Bolehkah anda tentukan domain, kodomain dan julatnya?

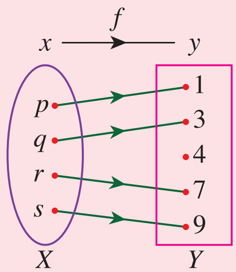
1.1.2

KPM

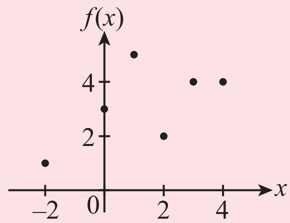
Contoh 4

Tentukan domain, kodomain dan julat bagi setiap fungsi f yang berikut.

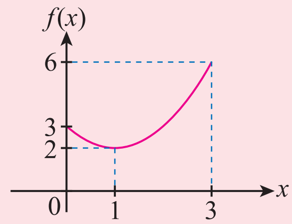
(a)



(b)



(c)



Penyelesaian

(a) Domain = $\{p, q, r, s\}$
Kodomain = $\{1, 3, 4, 7, 9\}$
Julat = $\{1, 3, 7, 9\}$

(b) Domain = $\{-2, 0, 1, 2, 3, 4\}$
Kodomain = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
Julat = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

(c) Domain f ialah $0 \leqslant x \leqslant 3$.
Kodomain f ialah $2 \leqslant f(x) \leqslant 6$.
Julat f ialah $2 \leqslant f(x) \leqslant 6$.

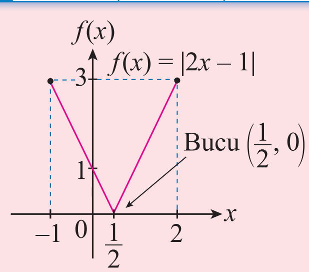
Contoh 5

Fungsi f ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow |2x - 1|$. Lakarkan graf bagi f untuk domain $-1 \leqslant x \leqslant 2$ dan nyatakan julat f yang sepadan untuk domain itu.

Penyelesaian

Graf $f(x) = |2x - 1|$ boleh dilakarkan dengan memplot beberapa titik dalam domain $-1 \leqslant x \leqslant 2$ seperti dalam jadual berikut.

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = f(x) = \|2x - 1\|$	3	1	0	1	3
(x, y)	$(-1, 3)$	$(0, 1)$	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$(1, 1)$	$(2, 3)$



Daripada graf, julat bagi $f : x \rightarrow |2x - 1|$ ialah $0 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

Kaedah Alternatif

Daripada Contoh 5, lukis graf $y = 2x - 1$ dalam domain $-1 \leqslant x \leqslant 2$ terlebih dahulu. Bahagian graf yang berada di bawah paksi-x dipantulkan pada paksi-x untuk memperoleh graf bagi $f(x) = |2x - 1|$.

Celik Teknologi

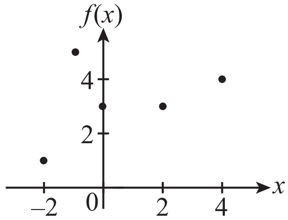
Dengan menggunakan perisian *GeoGebra*, lukis graf $y = |x|$, $y = 2|x|$, $y = 4|x|$ dan $y = \frac{1}{2}|x|$.

Apakah pola yang dapat anda perhatikan? Bolehkah anda meramalkan graf bagi $y = 8|x|$ dan $y = \frac{1}{4}|x|$?

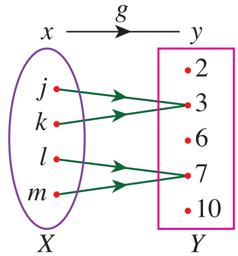
Latih Diri 1.2

1. Tentukan domain, kodomain dan julat bagi setiap fungsi yang berikut.

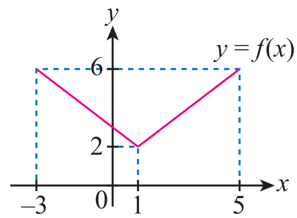
(a)



(b)



(c)



2. Lakarkan graf fungsi yang berikut untuk domain $-2 \leqslant x \leqslant 4$. Seterusnya, nyatakan julat yang sepadan dengan domain yang diberi.

(a) $f : x \rightarrow |x + 1|$ (b) $f(x) = |4 - 2x|$ (c) $f : x \rightarrow |2x - 5|$

Menentukan imej suatu fungsi apabila objek diberi dan sebaliknya

Pertimbangkan sebuah mesin pengisar buah-buahan. Apabila kita memasukkan buah oren ke dalam mesin itu, jus buah oren akan terhasil. Mustahil untuk kita mendapat jus lain selain jus buah oren.

Bayangkan analogi ini dengan menganggap fungsi sebagai sebuah mesin dengan input dan outputnya sebagai objek dan imejnya. Sehubungan dengan itu, jika objek x diberi dan digantikan ke dalam suatu fungsi, maka imej $f(x)$ yang sepadan boleh ditentukan. Begitu juga jika imej, $f(x)$ diberi, objek x boleh ditentukan.

Contoh 6

Fungsi f ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow 3x + \dfrac{5}{x}, x \neq 0$. Cari

(a) $f(5)$,

(b) imej bagi $\dfrac{1}{3}$ di bawah f,

(c) nilai-nilai x yang mungkin apabila imejnya ialah 8.

Cabar Minda

$f : x \rightarrow 3x + \dfrac{5}{x}, x \neq 0.$

Mengapakah $x \neq 0$?

Jika $f(x) = \dfrac{2}{x + 3}, x \neq k$, apakah nilai k?

Penyelesaian

(a) $f(5) = 3(5) + \dfrac{5}{5}$

$= 15 + 1$

$= 16$

(b) Diberi $f(x) = 3x + \dfrac{5}{x}$.

Imej bagi $\dfrac{1}{3}$,

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3\left(\dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{5}{\left(\dfrac{1}{3}\right)}$

$= 1 + 15$

$= 16$

(c)

$$\begin{aligned} f(x) &= 8 \\ 3x + \frac{5}{x} &= 8 \\ 3x^2 + 5 &= 8x \\ 3x^2 - 8x + 5 &= 0 \\ (3x - 5)(x - 1) &= 0 \\ x = \frac{5}{3} &\text{ atau } x = 1 \end{aligned}$$

Darabkan kedua-dua belah persamaan dengan x.

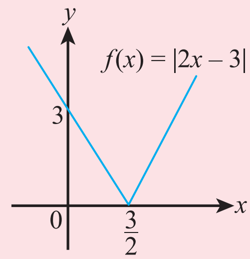
Maka, nilai-nilai x yang mungkin ialah $x = \dfrac{5}{3}$ dan $x = 1$.

1.1.2 1.1.3

Contoh 7

Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf $f(x) = |2x - 3|$, cari

(a) nilai bagi $f(-2)$ dan $f(4)$,
(b) nilai-nilai x dengan keadaan $f(x) = 5$,
(c) nilai-nilai x yang memetakan kepada diri sendiri,
(d) domain bagi $f(x) < 1$,
(e) domain bagi $f(x) \geqslant 3$.



Penyelesaian

(a) $f(-2) = |2(-2) - 3|$
$= |-7|$
$= 7$

$f(4) = |2(4) - 3|$
$= |5|$
$= 5$

(b) $f(x) = 5$
$|2x - 3| = 5$
$2x - 3 = -5$ atau $2x - 3 = 5$
$2x = -2$ $\quad$ $2x = 8$
$x = -1$ $\quad$ $x = 4$

(c) $f(x) = x$
$|2x - 3| = x$
$2x - 3 = -x$ atau $2x - 3 = x$
$3x = 3$ $\quad$ $x = 3$
$x = 1$

(d) $f(x) < 1$
$|2x - 3| < 1$
$-1 < 2x - 3 < 1$
$2 < 2x < 4$
$1 < x < 2$

(e) $f(x) \geqslant 3$
$2x - 3 \leqslant -3$ atau $2x - 3 \geqslant 3$
$2x \leqslant 0$ $\quad$ $2x \geqslant 6$
$x \leqslant 0$ $\quad$ $x \geqslant 3$

QR

Penyelesaian bagi persamaan dan ketaksamaan yang melibatkan nilai mutlak.

bit.ly/2Gvg8FI

Latih Diri 1.3

1. Fungsi g ditakrifkan oleh $g : x \rightarrow 3 + \dfrac{6}{x - 1}$, $x \neq 1$.
(a) Cari imej bagi -5, -2 dan $\dfrac{1}{2}$.
(b) Diberi imej bagi b ialah $2b$, cari nilai-nilai yang mungkin bagi b.

2. Fungsi h ditakrifkan oleh $h : x \rightarrow \dfrac{kx - 3}{x - 1}$, $x \neq 1$. Cari nilai k dengan keadaan
(a) $h(2) = 5$
(b) $h(3) = k$
(c) $h(k) = k$

3. Fungsi f ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow |4x - 3|$, hitung
(a) $f(-2)$ dan $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$,
(b) nilai-nilai x dengan keadaan $f(x) = 1$,
(c) domain bagi $f(x) < 1$,
(d) domain bagi $f(x) > 5$.

4. Diberi $g(x) = |6 - 2x|$, cari nilai-nilai x jika $g(x) = x$.

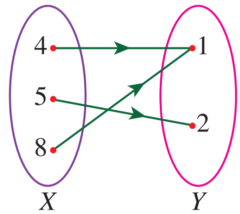
5. Fungsi f ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow mx + c$. Diberi $f(2) = 7$ dan $f(4) = -1$, cari
(a) nilai m dan nilai c,
(b) imej bagi 2 di bawah f,
(c) nilai x yang tidak berubah di bawah pemetaan f.

Latihan Intensif 1.1

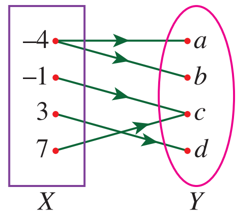
Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2StPC4k untuk kuiz

1. Antara hubungan berikut, yang manakah adalah fungsi? Berikan alasan anda.

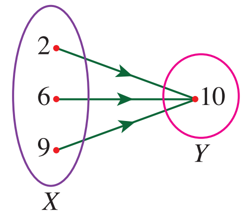
(a)



(b)

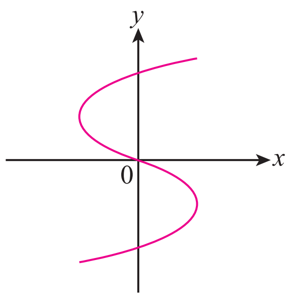


(c)

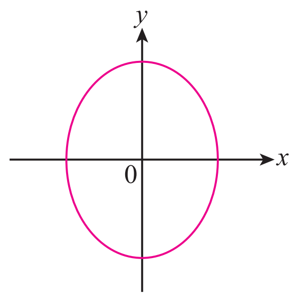


2. Dengan menggunakan ujian garis mencancang, tentukan sama ada graf yang berikut ialah fungsi atau bukan.

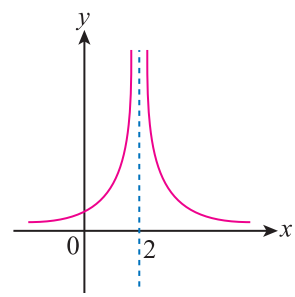
(a)



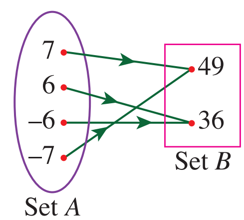
(b)



(c)



3. Rajah di sebelah menunjukkan imej bagi unsur-unsur tertentu set A.

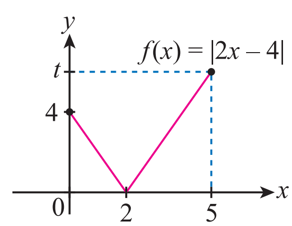


(a) Adakah hubungan itu merupakan fungsi? Jika ya, nyatakan alasan anda.

(b) Nyatakan domain dan julat hubungan itu.

(c) Dengan menggunakan tatatanda fungsi, tulis satu hubungan antara set A dan set B.

4. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi fungsi $f(x) = |2x - 4|$ untuk domain $0 \leqslant x \leqslant 5$. Cari



(a) nilai t,

(b) julat f berdasarkan domain yang diberi,

(c) julat nilai x dengan keadaan $f(x) \leqslant 4$.

5. Seketul batu jatuh ke tanah dari ketinggian 81 meter. Tinggi batu itu, H meter, selepas t saat, dianggarkan oleh $H(t) = 81 - 9t^2$.

(a) Nyatakan ketinggian batu itu apabila

(i) $t = \frac{1}{3}$ saat,

(ii) $t = 1$ saat,

(iii) $t = 2$ saat.

(b) Bilakah batu itu mencecah permukaan tanah?

1.2 Fungsi Gubahan

Gambar foto di sebelah menunjukkan tumpahan minyak yang berlaku dari sebuah kapal. Tumpahan minyak itu membentuk sebuah bulatan. Luas tumpahan minyak, A, yang berbentuk bulatan itu ialah fungsi dengan jejari, r, dalam meter, dan boleh dimodelkan sebagai $A = f(r) = \pi r^2$.

Panjang jejari, r meningkat dengan masa, t, dalam jam, diukur dari saat bermulanya tumpahan minyak. Hubungan ini boleh dimodelkan sebagai $r = g(t) = 100t$. Dengan menggantikan $r = 100t$ ke dalam fungsi $A = f(r) = \pi r^2$, kita peroleh:

$$\begin{aligned} A &= f(100t) \\ &= \pi(100t)^2 \\ &= 10\,000\ \pi t^2\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

Jika masa t diberi, maka luas tumpahan minyak itu boleh diketahui. Apakah yang dapat anda katakan tentang gabungan dua fungsi $A = f(r)$ dan $r = g(t)$ yang menghasilkan $A = f[g(t)]$?

Memerihalkan hasil gubahan dua fungsi

INKUIRI 2 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Meneroka hasil gubahan dua fungsi f dan g

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Diberi fungsi $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = x^2$ serta graf masing-masing.
3. Perhatikan graf yang terbentuk pada satah.
4. Klik pada butang $f[g(x)]$ dan perhatikan graf yang terpapar pada satah.
5. Bagaimanakah untuk memperoleh fungsi $f[g(x)]$?
6. Apakah bentuk graf yang terhasil daripada gabungan fungsi f dan g?
7. Seterusnya, klik semula pada butang $f[g(x)]$ untuk memadam graf $f[g(x)]$ tersebut.
8. Klik pada butang $g[f(x)]$ dan perhatikan graf yang terpapar pada satah.
9. Bagaimanakah graf $g[f(x)]$ diperoleh?
10. Apakah bentuk graf yang terhasil daripada gabungan fungsi g dan f?
11. Kemudian, tukarkan fungsi f dan g masing-masing dengan fungsi yang lain untuk meneroka hasil gubahan dua fungsi dan grafnya.
12. Setiap kumpulan akan bergerak ke kumpulan lain untuk melihat hasil dapatan.
13. Bincang dengan ahli kumpulan anda tentang hasil dapatan kumpulan lain.

bit.ly/2U5VrEq

Hasil daripada Inkuiri 2, didapati bahawa fungsi $f[g(x)]$ diperoleh dengan menggantikan fungsi g ke dalam fungsi f manakala fungsi $g[f(x)]$ diperoleh dengan menggantikan fungsi f ke dalam fungsi g.

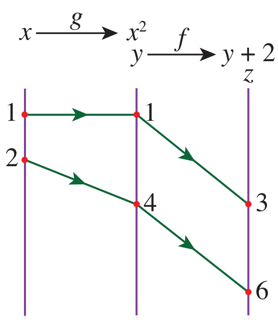
1.2.1

Proses gabungan secara penggantian dua fungsi f dan g untuk menghasilkan $f[g(x)]$ atau $g[f(x)]$ ini dikenali sebagai hasil gubahan dua fungsi dan ditulis sebagai $fg(x)$ atau $gf(x)$. $fg(x)$ dibaca sebagai "f gubahan g bagi x" dan ditakrifkan oleh $fg(x) = f[g(x)]$.
Secara amnya:

Diberi dua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, hasil gabungan dua fungsi yang ditulis sebagai $fg(x)$ atau $gf(x)$ ditakrifkan sebagai $fg(x) = f[g(x)]$ atau $gf(x) = g[f(x)]$.

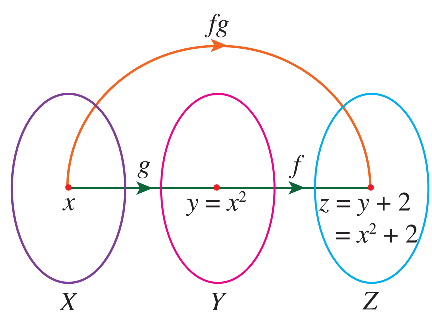
Menentukan fungsi gubahan

Diberi fungsi $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = x^2$. Rajah di bawah menunjukkan sebahagian daripada pemetaan di bawah fungsi g diikuti oleh fungsi f.



$$1 \xrightarrow{g} 1^2 = 1 \xrightarrow{f} 1 + 2 = 3$$
$$2 \xrightarrow{g} 2^2 = 4 \xrightarrow{f} 4 + 2 = 6$$
$$x \xrightarrow{g} x^2 = y \xrightarrow{f} y + 2 = z = x^2 + 2$$

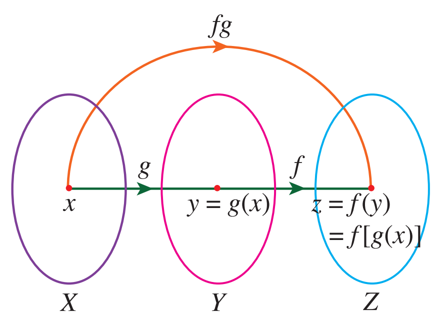
Berdasarkan pola dalam rajah di atas, kita boleh meringkaskannya seperti gambar rajah anak panah di sebelah.



Daripada gambar rajah anak panah, didapati bahawa terdapat satu pemetaan secara langsung daripada satu unsur $x \in X$ kepada satu unsur $z \in Z$ yang ditakrifkan oleh fungsi $fg(x) = x^2 + 2$.

Fungsi baharu bagi gabungan dua fungsi f dan g dengan domain X dan kodomain Z dikenali sebagai fungsi gubahan f dan g yang diwakili oleh fungsi fg.

Maka, daripada proses yang ditunjukkan, kita boleh simpulkan bahawa:



$$\boxed{fg(x) = f[g(x)]}$$

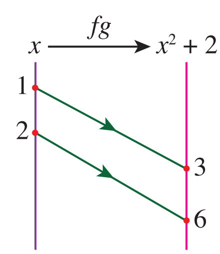
Secara algebra, fungsi gubahan $fg(x)$ boleh ditentukan seperti berikut:

$f(x) = x + 2$

$fg(x) = f[g(x)] \leftarrow g(x) = x^2$

$\quad\quad = f(x^2)$

$\quad\quad = x^2 + 2$ atau $fg : x \to x^2 + 2$



1.2.1 1.2.2

Contoh 8

Dua fungsi ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow 2x$ dan $g : x \rightarrow x^2 - 5$. Tentukan fungsi gubahan yang berikut.

(a) fg (b) gf
(c) f^2 (d) g^2

Penyelesaian

(a) $fg(x) = f[g(x)]$
$= f(x^2 - 5)$
$= 2(x^2 - 5)$
$= 2x^2 - 10$
Maka, $fg : x \rightarrow 2x^2 - 10$

(b) $gf(x) = g[f(x)]$
$= g(2x)$
$= (2x)^2 - 5$
$= 4x^2 - 5$
Maka, $gf : x \rightarrow 4x^2 - 5$

(c) $f^2(x) = f[f(x)]$
$= f(2x)$
$= 2(2x)$
$= 4x$
Maka, $f^2 : x \rightarrow 4x$

(d) $g^2 = g[g(x)]$
$= g(x^2 - 5)$
$= (x^2 - 5)^2 - 5$
$= x^4 - 10x^2 + 25 - 5$
$= x^4 - 10x^2 + 20$
Maka, $g^2 : x \rightarrow x^4 - 10x^2 + 20$

Cabar Minda

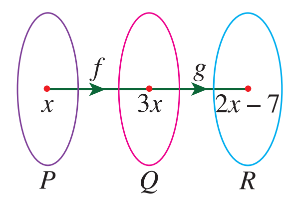
Adakah fungsi gubahan, *fg* dan *gf* sentiasa berbeza?

POKET MATEMATIK

f^2 adalah sama dengan *ff*. Begitu juga dengan g^2 yang sama dengan *gg*.

Latih Diri 1.4

1. Dalam gambar rajah anak panah di sebelah, fungsi f memetakan set P kepada set Q dan fungsi g memetakan set Q kepada set R. Tentukan
(a) fungsi f,
(b) fungsi gf.



2. Untuk setiap pasangan fungsi berikut, dapatkan ungkapan dalam bentuk tatatanda fungsi bagi fg, gf, f^2 dan g^2.
(a) $f : x \rightarrow 3x$, $g : x \rightarrow 3 - x$
(b) $f : x \rightarrow 4 + 2x$, $g : x \rightarrow x^2$
(c) $f : x \rightarrow x + 4$, $g : x \rightarrow \dfrac{6}{x}$, $x \neq 0$
(d) $f : x \rightarrow x - 5$, $g : x \rightarrow \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$

3. Dua fungsi f dan g ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow 3x + 4$ dan $g : x \rightarrow x^2 + 6$. Cari ungkapan bagi fg dan gf, kemudian cari nilai-nilai x apabila
(a) $f = g$
(b) $fg = gf$

4. Diberi bahawa $f : x \rightarrow ax + b$ dan $f^2 : x \rightarrow 4x - 9$, cari nilai-nilai pemalar a dan b.

5. Jika $f : x \rightarrow 3x + k$ dan $g : x \rightarrow 2h - 3x$ dengan keadaan $fg = gf$, cari hubungan antara h dengan k.

Menentukan imej atau objek bagi suatu fungsi gubahan

Dengan menggantikan nilai bagi objek ke dalam suatu fungsi gubahan, imejnya boleh ditentukan. Begitu juga jika nilai bagi imej diberi, maka objek boleh ditentukan dengan menyelesaikan persamaan itu.

Contoh 9

Jika $f : x \rightarrow x - 1$ dan $g : x \rightarrow x^2 - 3x + 4$, cari
(a) $fg(2)$ dan $gf(1)$,
(b) nilai-nilai x apabila $fg(x) = 7$.

Penyelesaian

(a)
$$\begin{aligned} fg(x) &= f[g(x)] \\ &= f(x^2 - 3x + 4) \\ &= x^2 - 3x + 4 - 1 \\ &= x^2 - 3x + 3 \end{aligned}$$

Maka, $fg(2) = (2)^2 - 3(2) + 3$
$= 1$

$$\begin{aligned} gf(x) &= g[f(x)] \\ &= g(x - 1) \\ &= (x - 1)^2 - 3(x - 1) + 4 \\ &= x^2 - 2x + 1 - 3x + 3 + 4 \\ &= x^2 - 5x + 8 \end{aligned}$$

Maka, $gf(1) = (1)^2 - 5(1) + 8$
$= 4$

(b)
$$\begin{aligned} fg(x) &= 7 \\ x^2 - 3x + 3 &= 7 \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ (x + 1)(x - 4) &= 0 \\ x = -1 \text{ atau } x &= 4 \end{aligned}$$

Maka, nilai-nilai x ialah -1 dan 4.

Kaedah Alternatif

(a) $g(2) = 2^2 - 3(2) + 4$
$= 2$
Maka, $fg(2) = f(2)$
$= 2 - 1$
$= 1$

Latih Diri 1.5

1. Diberi dua fungsi f dan g.

(a) $f : x \rightarrow 2x + 1$ dan $g : x \rightarrow \dfrac{x}{x-1}, x \neq 1$, cari $fg(3)$.

(b) $f : x \rightarrow 5x + 6$ dan $g : x \rightarrow 2x - 1$, cari $gf\left(-\dfrac{1}{5}\right)$.

(c) $f : x \rightarrow \dfrac{x+1}{x-3}, x \neq 3$ dan $g : x \rightarrow \dfrac{6}{x-2}, x \neq 2$, cari $f^2(4)$ dan $g^2\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

(d) $f : x \rightarrow x^2 - 4$ dan $g : x \rightarrow \dfrac{2}{x-2}, x \neq 2$, cari $f^2(-1)$ dan $g^2(1)$.

2. Bagi setiap fungsi berikut, cari nilai bagi objek x.

(a) $f : x \rightarrow 2x - 5, g : x \rightarrow \dfrac{10}{x}, x \neq 0$ dan $fg(x) = 5$.

(b) $f : x \rightarrow x^2 - 1, g : x \rightarrow 2x + 1$ dan $gf(x) = 7$.

(c) $f : x \rightarrow 3x - 2$ dan $f^2(x) = 10$.

(d) $g : x \rightarrow \dfrac{2}{x-2}, x \neq 2$ dan $g^2(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Menentukan suatu fungsi apabila fungsi gubahan dan salah satu fungsinya diberi

Apabila suatu fungsi gubahan dan salah satu fungsinya diberi, maka fungsi yang satu lagi boleh ditentukan.

Contoh 10

Fungsi f ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow x - 2$. Cari fungsi g dalam setiap yang berikut.

(a) $fg : x \rightarrow 8x - 7$

(b) $gf : x \rightarrow x^2 + 3x - 5$

Penyelesaian

(a)
$$\begin{aligned} f[g(x)] &= 8x - 7 \\ g(x) - 2 &= 8x - 7 \\ g(x) &= 8x - 7 + 2 \\ g(x) &= 8x - 5 \end{aligned}$$
Maka, $g : x \rightarrow 8x - 5$

(b)
$$\begin{aligned} g[f(x)] &= x^2 + 3x - 5 \\ g(x - 2) &= x^2 + 3x - 5 \end{aligned}$$
Katakan $y = x - 2$
$x = y + 2$
Jadi,
$$\begin{aligned} g(y) &= (y + 2)^2 + 3(y + 2) - 5 \\ &= y^2 + 4y + 4 + 3y + 6 - 5 \\ &= y^2 + 7y + 5 \end{aligned}$$
Gantikan y dengan x, $g(x) = x^2 + 7x + 5$
Maka, $g : x \rightarrow x^2 + 7x + 5$

Latih Diri 1.6

1. Diberi fungsi f dan fungsi gubahan fg, tentukan fungsi g bagi setiap yang berikut.
   (a) $f : x \rightarrow x - 3, fg : x \rightarrow 2x^2 - 4x + 7$
   (b) $f : x \rightarrow x^2 + 1, fg : x \rightarrow x^2 + 4x + 5$
2. Diberi fungsi f dan fungsi gubahan gf, tentukan fungsi g bagi setiap yang berikut.
   (a) $f : x \rightarrow x + 1, gf : x \rightarrow x^2 - 2x - 3$
   (b) $f : x \rightarrow x^2 + 3, gf : x \rightarrow 2x^2 + 3$
3. Diberi fungsi $h(x) = \dfrac{8}{x}, x \neq 0$ dan $hg(x) = 4x$, cari
   (a) $g(x)$,
   (b) nilai x apabila $gh(x) = 6$.
4. Diberi fungsi $g(x) = 3x$ dan $fg(x) = 9x - 7$, cari
   (a) $f(x)$,
   (b) $gf(2)$.

Menyelesaikan masalah melibatkan fungsi gubahan

Contoh 11

Fungsi f ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow \dfrac{1}{x^2}, x \neq 0$.

(a) Ungkapkan $f^2(x), f^3(x)$ dan $f^4(x)$ dalam bentuk yang paling ringkas.
(b) Seterusnya, cari $f^{22}(x)$ dan $f^{33}(x)$.

Penyelesaian

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$

$f^2(x) = f[f(x)]$
$= f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
$= \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2}$
$= x^4$
$= x^{2^2}$

$f^3(x) = f[f^2(x)]$
$= f(x^4)$
$= \dfrac{1}{(x^4)^2}$
$= \dfrac{1}{x^8}$
$= x^{-2^3}$

$f^4(x) = f[f^3(x)]$
$= f\left(\dfrac{1}{x^8}\right)$
$= \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x^8}\right)^2}$
$= x^{16}$
$= x^{2^4}$

(b) Daripada pola dalam (a), kita boleh deduksikan bahawa $f^n(x) = x^{-2^n}$ apabila n ganjil dan $f^n(x) = x^{2^n}$ apabila n genap. Maka, $f^{22}(x) = x^{2^{22}}$ dan $f^{33}(x) = x^{-2^{33}}$.

Contoh 12 APLIKASI MATEMATIK

Jumlah pengeluaran barangan sehari, q, oleh sebuah kilang bergantung kepada bilangan pekerja, n, dan fungsinya dimodelkan oleh $q(n) = 10n - \dfrac{1}{4}n^2$. Jumlah pendapatan sehari, r, dalam RM, yang diterima daripada jualan q barangan pula dimodelkan oleh fungsi $r(q) = 40q$. Tentukan jumlah pendapatan kilang itu dalam masa sehari jika bilangan pekerja ialah 20 orang.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Diberi dua fungsi, q dan r masing-masing ditakrifkan oleh $q(n) = 10n - \dfrac{1}{4}n^2$ dan $r(q) = 40q$.
- Cari jumlah pendapatan kilang dalam masa sehari dengan 20 orang pekerja.

2. Merancang strategi

- Cari fungsi gubahan $rq(n)$ terlebih dahulu untuk menentukan jumlah pendapatan kilang, r merupakan fungsi bagi bilangan pekerja, n, iaitu $r(n)$.
- Gantikan $n = 20$ ke dalam fungsi gubahan $r(n)$ yang diperoleh untuk menentukan jumlah pendapatan sehari, dalam RM, kilang itu.

1.2.5

3. Melaksanakan strategi

$rq(n) = r[q(n)]$

$= r\left(10n - \frac{1}{4}n^2\right)$

$= 40\left(10n - \frac{1}{4}n^2\right)$

$= 400n - 10n^2$

Oleh itu, $r(n) = 400n - 10n^2$

Dengan 20 orang pekerja,

$r(20) = 400(20) - 10(20^2)$

$= 8\ 000 - 4\ 000$

$= 4\ 000$

Maka, pendapatan kilang itu dengan pekerja seramai 20 orang ialah RM4 000 sehari.

4. Membuat refleksi

Apabila $r(n) = 4\ 000$,

$4\ 000 = 400n - 10n^2$

$10n^2 - 400n + 4\ 000 = 0$

$n^2 - 40n + 400 = 0$

$(n - 20)(n - 20) = 0$

$n = 20$

Maka, pendapatan kilang sebanyak RM4 000 akan diperoleh apabila bilangan pekerja ialah 20 orang.

Latih Diri 1.7

1. Fungsi f ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow \frac{x}{x+1}, x \neq -1$.

(a) Cari fungsi berulang f^2, f^3 dan f^4.

(b) Seterusnya, tuliskan fungsi bagi f^{20} dan f^{23}.

2. Jika $f : x \rightarrow \frac{1}{x}, x \neq 0$, cari

(a) fungsi berulang f^2, f^3 dan f^4,

(b) nilai bagi $f^{40}(2)$ dan $f^{43}(2)$.

3. Luas permukaan sebuah belon udara panas, A, dalam m^2, yang berisi udara panas diberi oleh fungsi $A(r) = 4\pi r^2$ dengan r ialah jejari belon, dalam meter. Jejari belon itu bertambah sebagai fungsi masa, t, dalam saat, mengikut rumus $r(t) = \frac{2}{3}t^3, t \geqslant 0$.

(a) Nyatakan luas permukaan belon, A, sebagai fungsi masa, t.

(b) Cari luas permukaan belon setelah 2 saat.

4. Sebuah bekas berbentuk silinder berjejari 20 cm mengandungi 200 cm^3 air. Air diisi ke dalam bekas itu dengan kadar malar 100 cm^3 per saat.

(a) Tuliskan rumus untuk

(i) kuantiti air, v, di dalam bekas itu selepas t saat,

(ii) tinggi air, h, di dalam bekas itu dalam sebutan v,

(iii) fungsi gubahan $hv(t)$.

(b) Cari tinggi air di dalam bekas itu selepas 20 saat.

5. Seketul batu kecil dibaling ke dalam sebuah kolam yang tenang dan menghasilkan riak air berbentuk bulatan. Jejari, r, dalam cm, bagi riak air itu bertambah dengan kadar 3 cm per saat.

(a) Cari ungkapan bagi jejari, r, dalam sebutan masa, t, selepas batu itu dibaling.

(b) Jika A ialah luas riak air, terangkan maksud fungsi gubahan $Ar(t)$.

(c) Cari luas A, riak air itu selepas 30 saat.

Latihan Intensif 1.2

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2LBm7wR untuk kuiz

1. Dua fungsi ditakrifkan oleh $f : x \to 2x - 1$ dan $g : x \to \dfrac{x}{x+1}$, $x \neq -1$. Cari

(a) fg dan gf, (b) $fg(2)$ dan $gf\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, (c) nilai x apabila $fg = gf$.

2. Fungsi f dan g ditakrifkan oleh $f : x \to \dfrac{x}{x-1}$, $x \neq 1$ dan $g : x \to hx + k$, dengan keadaan h dan k ialah pemalar. Diberi $g(3) = 8$ dan $gf(2) = 5$, cari

(a) nilai h dan nilai k, (b) nilai a jika $fg(a) = 3$.

3. Fungsi f dan g ditakrifkan oleh $f : x \to ax - b$ dengan a dan b ialah pemalar dan $g : x \to x + 4$. Diberi $fg(2) = 9$ dan $gf\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$, cari nilai a dan nilai b.

4. Fungsi f dan g ditakrifkan oleh $f : x \to \dfrac{2}{x-3}$, $x \neq 3$ dan $g : x \to hx^2 + k$, dengan keadaan h dan k ialah pemalar.

(a) Diberi $g(2) = 5$ dan $gf(1) = -1$, hitung nilai h dan nilai k.

(b) Cari ungkapan bagi gf.

5. Diberi bahawa $f : x \to ax + b$ dan $f^3 : x \to 27x + 13$, cari

(a) nilai a dan nilai b,

(b) ungkapan bagi f^4.

6. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah kotak tisu dengan tapak berbentuk segi empat sama bersisi x cm dan tinggi 10 cm.

(a) Tulis luas tapak kotak, A sebagai fungsi x dan isi padu kotak, V sebagai fungsi A.

(b) Tunjukkan isi padu, V adalah hasil gubahan daripada kedua-dua fungsi ini.

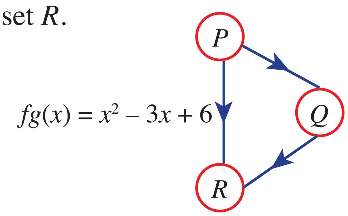
7. Fungsi f ditakrifkan oleh $f : x \to x + 6$. Cari fungsi g dalam setiap yang berikut.

(a) $fg : x \to 2x^2 - 3x - 7$ (b) $gf : x \to x^2 + 4$ (c) $gf : x \to 8 - x$

8. Rajah di sebelah menunjukkan hubungan antara set P, set Q dan set R. Diberi bahawa set P dipetakan kepada set Q oleh fungsi $\dfrac{x-1}{3}$ dan dipetakan kepada set R oleh $fg : x \to x^2 - 3x + 6$.

(a) Tulis fungsi yang memetakan set P kepada set Q dengan menggunakan tatatanda fungsi.

(b) Cari fungsi yang memetakan set Q kepada set R.



9. Diberi $f : x \to px + q$ dan $f^3 : x \to 8x - 7$,

(a) cari nilai p dan nilai q,

(b) tentukan fungsi f^4,

(c) dengan melihat pola f, f^2, f^3 dan f^4, tentukan rumus umum f^n untuk n bilangan kali.

10. N buah kereta yang dikeluarkan oleh sebuah kilang kereta dalam masa satu hari selepas t jam beroperasi diberi oleh $N(t) = 100t - 5t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 10$. Jika kos, dalam RM, untuk mengeluarkan x buah kereta ialah $C(N) = 15\,000 + 8\,000x$, cari kos C sebagai fungsi masa t, bagi operasi kilang itu.

1.3 Fungsi Songsang

Anda membaca berita dalam talian yang menyatakan bahawa suhu di New York ialah 39°F. Bagaimanakah cara untuk mengetahui suhu tersebut dalam darjah Celsius?

Hubungan antara penunjuk angka pada sebatang termometer Fahrenheit, F dan darjah Celsius, C ialah suatu fungsi $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$. Dengan menjadikan C sebagai perkara rumus, iaitu $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$ dan menggantikan nilai $F = 39$ ke dalam fungsi C, suhu di New York dalam darjah Celsius akan diketahui.

(*Sumber: https://www.necn.com/weather/maps/ NECN-Weather-Now-250228521.html*)

$$F : C \rightarrow \frac{9}{5}C + 32$$
$$C : F \rightarrow \frac{5}{9}(F - 32)$$

Adakah dengan melakukan operasi songsang seperti ini akan menghasilkan fungsi songsang bagi F?

Memerihalkan songsangan suatu fungsi

Fungsi songsang bagi suatu fungsi f boleh ditulis sebagai f^{-1}. Misalnya:

$f : x \rightarrow x + 2$
$f^{-1} : x \rightarrow x - 2$

Apakah yang dimaksudkan dengan songsangan suatu fungsi? Untuk mengetahui dengan lebih terperinci, mari kita ikuti penerokaan yang berikut.

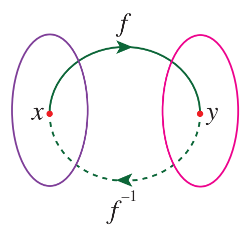
INKUIRI 3 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Meneroka perkaitan antara suatu graf fungsi dengan graf fungsi songsangnya

Arahan:
1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik butang semua fungsi dan perhatikan graf yang terbentuk.
3. Adakah graf bagi setiap fungsi dan graf fungsi songsangnya bersimetri dengan garis $h(x) = x$?
4. Lakukan perbincangan dalam kumpulan masing-masing.

ggbm.at/tvaq4zfs

Hasil daripada Inkuiri 3, didapati bahawa setiap graf fungsi dan graf fungsi songsangnya bersimetri pada garis $h(x) = x$, iaitu garis $y = x$. Graf f^{-1} ialah pantulan bagi graf f pada garis $y = x$.



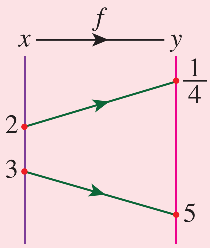
$$f : x \rightarrow y \Leftrightarrow f^{-1} : y \rightarrow x \text{ atau } y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

1.3.1

Contoh 13

Dalam gambar rajah anak panah di sebelah, fungsi f memetakan x kepada y. Tentukan

(a) $f^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$ (b) $f^{-1}(5)$



Penyelesaian

(a) Daripada gambar rajah anak panah yang diberi, kita peroleh

$f(2) = \dfrac{1}{4}$, maka $f^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2$.

(b) Melalui pemetaan songsang, $f^{-1} : 5 \to 3$.

Maka, $f^{-1}(5) = 3$. ← $f : x \to y \Leftrightarrow f^{-1} : y \to x$

POKET MATEMATIK

Tanda –1 yang digunakan dalam f^{-1} bukan bermaksud salingan bagi f, $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$ tetapi f^{-1} ialah songsangan bagi f.

Contoh 14

Suatu fungsi ditakrifkan sebagai $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$, $x \neq 4$. Tentukan

(a) imej bagi 2 di bawah f, (b) $f^{-1}(3)$.

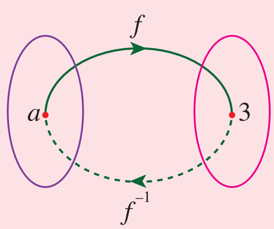
Penyelesaian

(a) Imej bagi 2, $f(2) = \dfrac{2}{2-4} = -1$

(b) Katakan $a = f^{-1}(3)$,

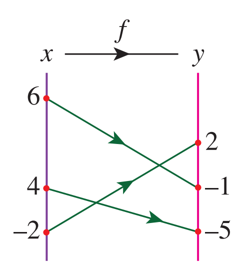
$$\begin{aligned} f(a) &= 3 \\ \frac{a}{a-4} &= 3 \\ a &= 3(a-4) \\ a &= 3a - 12 \\ 2a &= 12 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

Maka, $f^{-1}(3) = a = 6$



Latih Diri 1.8

1. Dalam gambar rajah anak panah di sebelah, fungsi f memetakan x kepada y. Cari
   (a) $f(4)$
   (b) $f^{-1}(-1)$
   (c) $f^{-1}(2)$
   (d) $f^{-1}(-5)$



2. Fungsi g dan h masing-masing ditakrifkan oleh $g(x) = \dfrac{5}{2-x}$, $x \neq 2$ dan $h(x) = 3x + 6$, cari
   (a) $g(12)$ (b) $g^{-1}(4)$ (c) $h(-1)$ (d) $h^{-1}(9)$

1.3.1

Membuat dan mengesahkan konjektur berkaitan sifat-sifat fungsi songsang

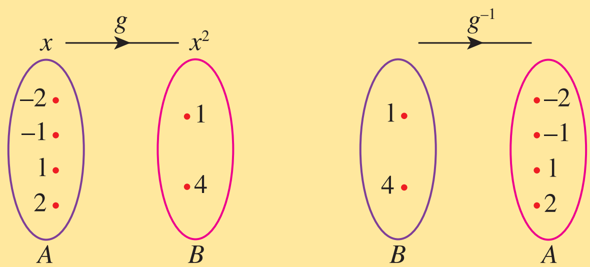
Lakukan Inkuiri 4, 5, 6 dan 7 yang berikut untuk membuat dan mengesahkan konjektur tentang sifat-sifat fungsi songsang.

INKUIRI 4 Berkumpulan PAK-21

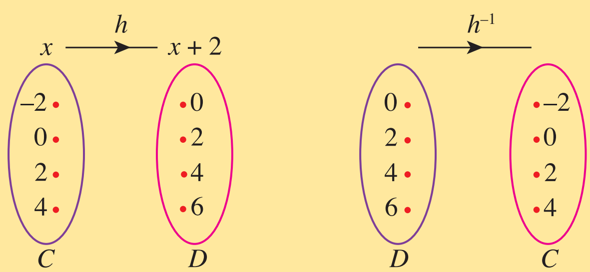
Tujuan: Membuat dan mengesahkan konjektur bahawa fungsi satu dengan satu mempunyai fungsi songsang

Arahan:

1. Salin dan lengkapkan pemetaan fungsi diskret yang berikut.
   (a) Fungsi diskret g yang memetakan set A kepada set B dan g^{-1} yang memetakan set B kepada set A.



   (b) Fungsi diskret h yang memetakan set C kepada set D dan h^{-1} yang memetakan set D kepada set C.



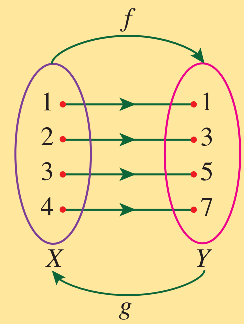
2. Adakah g^{-1} dan h^{-1} merupakan suatu fungsi?
3. Apakah jenis fungsi yang boleh menghasilkan fungsi songsang? Nyatakan konjektur anda.
4. Setiap kumpulan perlu memilih seorang wakil untuk membentangkan hasil dapatan di hadapan kelas. Ahli kumpulan yang lain boleh bertanyakan soalan kepada wakil.
5. Ulang langkah 4 sehingga semua kumpulan selesai membuat pembentangan.

Hasil daripada Inkuiri 4, didapati bahawa fungsi songsang ialah songsangan bagi suatu fungsi yang memetakan setiap unsur dalam kodomain kepada hanya satu unsur dalam domain. Maka, kita boleh rumuskan:

> Suatu fungsi f yang memetakan set X kepada set Y mempunyai fungsi songsang f^{-1} jika f ialah fungsi satu dengan satu.

INKUIRI 5 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Membuat dan mengesahkan konjektur fungsi gubahan $fg(x) = gf(x) = x$ dengan fungsi f dan g saling songsang antara satu sama lain



Arahan:

1. Gambar rajah anak panah di sebelah menunjukkan fungsi diskret f yang memetakan set X kepada set Y dan fungsi diskret g yang memetakan set Y kepada set X.
2. Lengkapkan petak kosong di bawah berdasarkan gambar rajah anak panah di sebelah.

$f(1) = 1$
$f(2) = 3$
$f(3) = \square$
$f(\square) = \square$

$g(1) = 1$
$g(3) = 2$
$g(5) = \square$
$g(\square) = \square$

$gf(1) = g(1) = 1$
$fg(1) = f(1) = 1$

$gf(2) = g(3) = 2$
$fg(3) = f(2) = 3$

$gf(3) = g(\square) = \square$
$fg(5) = f(\square) = \square$

$gf(4) = g(\square) = \square$
$fg(7) = f(\square) = \square$

3. Daripada hasil dapatan, apakah konjektur yang dapat dibuat terhadap nilai $fg(x)$ dan $gf(x)$?
4. Setiap kumpulan membentangkan hasil dapatan masing-masing di hadapan kelas dan lakukan sesi soal jawab antara kumpulan.

Hasil daripada Inkuiri 5, dua fungsi f dan g ialah fungsi songsang antara satu sama lain jika dan hanya jika:

$fg(x) = x$, x dalam domain g dan $gf(x) = x$, x dalam domain f.

INKUIRI 6 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Membuat dan mengesahkan konjektur jika dua fungsi f dan g saling songsang antara satu sama lain, maka
(a) domain f = julat g dan domain g = julat f
(b) graf g adalah pantulan graf f pada garis $y = x$.

ggbm.at/e4beb2uu

Arahan:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada petak $f(x) = \frac{1}{2}x$ untuk domain $0 \leqslant x \leqslant 8$ dan perhatikan graf yang terbentuk.
3. Kemudian, klik pada petak $g(x) = 2x$, iaitu fungsi songsang bagi f dan perhatikan graf yang terpapar.
4. Lengkapkan domain dan julat bagi graf f dan g dalam jadual di sebelah.
5. Apakah konjektur anda tentang hasil dapatan ini?
6. Bagaimanakah kedudukan graf f dan g terhadap garis $y = x$? Apakah konjektur anda?
7. Setiap wakil kumpulan bergerak ke kumpulan yang lain dan bentangkan hasil kumpulan masing-masing.

Graf	Domain	Julat
Graf fungsi f		
Graf fungsi g		

Hasil daripada Inkuiri 6, didapati bahawa:

Jika dua fungsi f dan g ialah fungsi songsang antara satu sama lain, maka
(a) domain f = julat g dan domain g = julat f
(b) graf g adalah pantulan graf f pada garis $y = x$

INKUIRI 7 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Membuat dan mengesahkan konjektur bahawa jika titik (a, b) berada pada graf f, maka titik (b, a) berada pada graf g

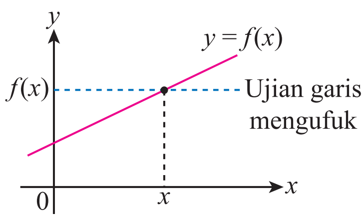
ggbm.at/hg9yxsab

Arahan:
1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada petak $f(x) = x^2 + 1$ untuk julat $0 \leqslant x \leqslant 3$ dan fungsi songsangnya, $g(x) = \sqrt{x - 1}$ untuk julat $1 \leqslant x \leqslant 10$.
3. Kemudian, klik pada petak "Titik dan pantulan". Seret titik A di sepanjang graf f. Perhatikan titik pada graf f dan graf g.
4. Apakah konjektur yang dapat dibuat tentang titik yang anda perhatikan pada kedua-dua graf?
5. Lakukan perbincangan dalam kumpulan mengenai hasil dapatan.
6. Setiap kumpulan melantik seorang wakil dan lakukan pembentangan di hadapan kelas.

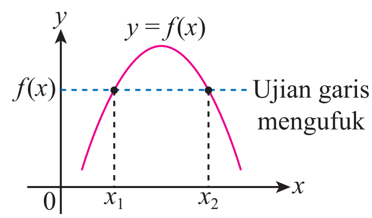
Hasil daripada Inkuiri 7, didapati bahawa:

Untuk mana-mana nombor nyata, a dan b, jika titik (a, b) berada pada graf f, maka titik (b, a) berada pada graf g, iaitu graf f^{-1}. Titik (b, a) di atas graf g ialah pantulan titik (a, b) di atas graf f pada garis $y = x$.

Untuk menentukan sama ada graf bagi suatu fungsi itu mempunyai fungsi songsang, ujian garis mengufuk boleh dilakukan. Jika garis mengufuk itu memotong suatu graf fungsi hanya pada satu titik, maka jenis fungsinya ialah satu dengan satu dan fungsi tersebut mempunyai fungsi songsang. Sebaliknya, jika garis mengufuk itu memotong suatu graf fungsi pada dua titik atau lebih, maka jenis fungsi itu bukan satu dengan satu dan fungsi tersebut tidak mempunyai fungsi songsang.



f mempunyai fungsi songsang



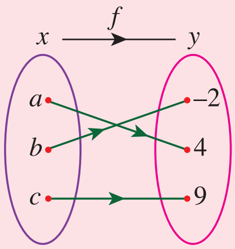
f tidak mempunyai fungsi songsang

1.3.2

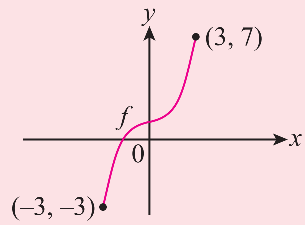
Contoh 15

Tentukan sama ada setiap fungsi f berikut mempunyai fungsi songsang atau tidak. Berikan sebab bagi jawapan anda.

(a)

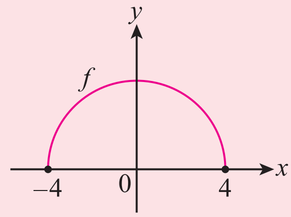


(b)



Domain: $-3 \leqslant x \leqslant 3$

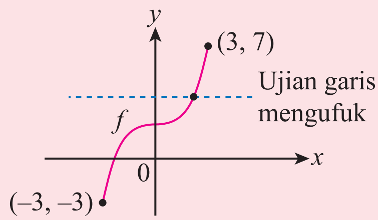
(c)



Domain: $-4 \leqslant x \leqslant 4$

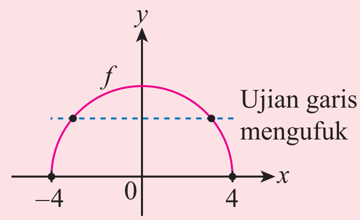
Penyelesaian

(a) f ialah suatu fungsi kerana jenis fungsi tersebut ialah fungsi satu dengan satu dengan setiap unsur dalam domain dipetakan kepada hanya satu unsur dalam kodomain. Songsangan bagi fungsi ini juga memetakan setiap unsur dalam kodomain kepada hanya satu unsur dalam domain. Maka, fungsi f mempunyai fungsi songsang.



(b) Apabila ujian garis mengufuk dilakukan, garis mengufuk memotong graf f hanya pada satu titik. Ini bermaksud jenis fungsi f ini ialah fungsi satu dengan satu. Maka, fungsi f mempunyai fungsi songsang.

(c) Apabila ujian garis mengufuk dilakukan, garis mengufuk memotong graf f pada dua titik. Ini bermaksud fungsi f ini bukan fungsi satu dengan satu. Jadi, fungsi f tidak mempunyai fungsi songsang.



Contoh 16

Sahkan kebenaran bahawa fungsi $f(x) = 3 - 2x$ mempunyai fungsi songsang, $g(x) = \dfrac{3 - x}{2}$.

Penyelesaian

Tentukan $fg(x)$ terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} fg(x) &= f[g(x)] \\ &= f\left(\frac{3-x}{2}\right) \\ &= 3 - 2\left(\frac{3-x}{2}\right) \\ &= 3 - (3 - x) \\ &= x \end{aligned}$$

Kemudian, tentukan $gf(x)$.

$$\begin{aligned} gf(x) &= g[f(x)] \\ &= g(3 - 2x) \\ &= \frac{3 - (3 - 2x)}{2} \\ &= \frac{2x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

Oleh sebab $fg(x) = gf(x) = x$, maka $g(x) = \dfrac{3 - x}{2}$ ialah fungsi songsang bagi $f(x) = 3 - 2x$.

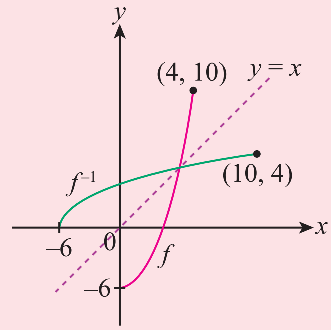
Contoh 17

Fungsi f ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow x^2 - 6$ untuk domain $0 \leqslant x \leqslant 4$. Pada satah yang sama, lakarkan graf bagi f dan f^{-1}. Seterusnya, nyatakan domain bagi f^{-1}.

Penyelesaian

Graf f ialah sebahagian daripada lengkung kuadratik $y = x^2 - 6$. Dengan memplot titik-titik dalam jadual nilai di bawah, graf f dilakar seperti dalam rajah di sebelah.

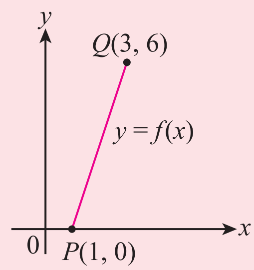
x	0	1	2	3	4
y	–6	–5	–2	3	10



Graf f^{-1} pula ialah pantulan graf f pada garis $y = x$.
Domain bagi f^{-1} ialah julat bagi f. Maka, domain bagi f^{-1} ialah $-6 \leqslant x \leqslant 10$.

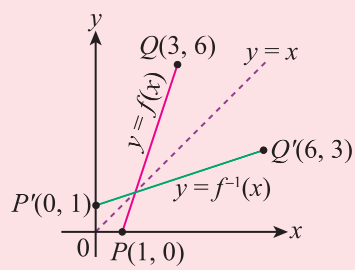
Contoh 18

Rajah di sebelah menunjukkan graf $y = f(x)$ yang melalui titik $P(1, 0)$ dan $Q(3, 6)$. Pada rajah yang sama, lakarkan graf $y = f^{-1}(x)$ dengan menunjukkan titik-titik yang sepadan dengan titik P dan titik Q.



Penyelesaian

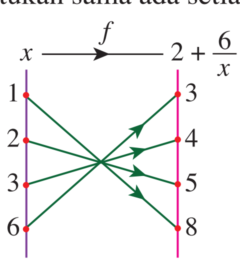
Graf $y = f^{-1}(x)$ ialah pantulan bagi graf $y = f(x)$ pada garis $y = x$.
Titik P' dan Q' pada graf $y = f^{-1}(x)$ yang sepadan dengan titik P dan Q ditunjukkan seperti dalam rajah di sebelah.



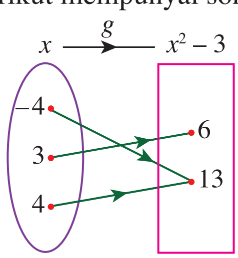
Latih Diri 1.9

1. Tentukan sama ada setiap fungsi berikut mempunyai songsangan atau tidak.

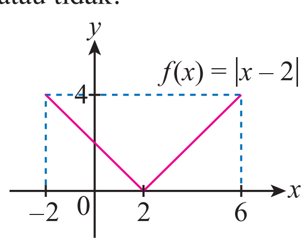
(a)



(b)



(c)



(d) $\{(1, 2), (4, 5), (5, 8), (9, 9)\}$

(e) $\{(-3, 2), (-1, 1), (2, 4), (5, 4), (9, 5)\}$

(f) $f : x \rightarrow 4 - x^2$

(g) $f : x \rightarrow \dfrac{1}{(x-2)^2}, x > 2$

2. Adakah fungsi f dan g berikut ialah fungsi songsang antara satu sama lain? Sahkan kebenarannya dengan menggunakan hubungan $fg(x) = gf(x) = x$.

(a) $f(x) = 3x - 2$ dan $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}, x \neq 3$ dan $g(x) = \dfrac{3x}{x-2}, x \neq 2$

(c) $f(x) = \dfrac{2}{x-3}, x \neq 3$ dan $g(x) = \dfrac{3x-2}{x}, x \neq 0$

(d) $f(x) = 2 + 5x$ dan $g(x) = \dfrac{x-5}{2}$

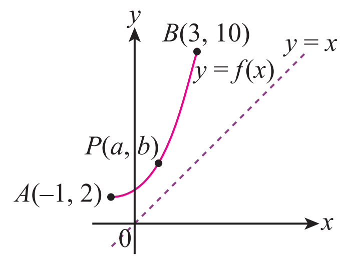
3. Fungsi f ditakrifkan sebagai $f : x \to x^3$ untuk domain $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Pada satah yang sama, lakarkan graf bagi f dan f^{-1}. Seterusnya, nyatakan domain dan julat bagi f^{-1}.

4. Fungsi h ditakrifkan sebagai $h(x) = x^2 - 2$ untuk domain $0 \leqslant x \leqslant 3$.
(a) Pada rajah yang sama, lakarkan graf bagi h dan h^{-1}.
(b) Nyatakan domain bagi h^{-1}.
(c) Cari nilai x dengan keadaan $h(x) = h^{-1}(x)$.

5. Koordinat bagi titik berikut terletak pada graf bagi fungsi satu dengan satu, f. Tentukan koordinatnya yang sepadan yang terletak pada graf f^{-1}.

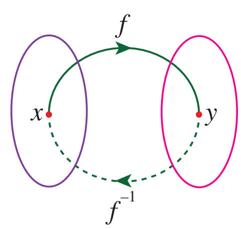
(a) $P\left(-2, \dfrac{1}{2}\right)$ (b) $Q(1, -3)$ (c) $R(4, 5)$ (d) $S(-6, -8)$

6. Rajah di sebelah menunjukkan garis $y = x$ dan graf bagi $y = f(x)$ untuk domain $-1 \leqslant x \leqslant 3$. Titik $A(-1, 2)$, $B(3, 10)$ dan $P(a, b)$ terletak pada graf itu.
(a) Lakarkan graf $y = f^{-1}(x)$ untuk menunjukkan titik-titik pada $y = f^{-1}(x)$ yang sepadan dengan titik A dan B.
(b) Cari nilai a dan b, jika koordinatnya yang sepadan terletak pada $y = f^{-1}(x)$ ialah $(4, 1)$.



Menentukan fungsi songsang

Kita telah mempelajari bahawa apabila diberi $y = f(x)$, maka $x = f^{-1}(y)$. Secara algebra, rumus fungsi songsang, $f^{-1}(x)$ dengan fungsi asalnya ialah $y = f(x)$ boleh ditentukan dengan mengikuti langkah-langkah yang berikut.



Ubah fungsi $y = f(x)$ kepada bentuk $x = f(y)$.	Tulis x sebagai $f^{-1}(y)$.	Gantikan pemboleh ubah y dengan pemboleh ubah x.

1.3.2 1.3.3

Contoh 19

Jika $f : x \rightarrow 5x + 2$, cari

(a) $f^{-1}(x)$ (b) $f^{-1}(7)$

Penyelesaian

(a) $f(x) = 5x + 2$

Katakan $y = 5x + 2$

$5x = y - 2$

$x = \dfrac{y-2}{5}$ ← Bentuk $x = f(y)$

Oleh sebab $x = f^{-1}(y)$,

$f^{-1}(y) = x$ ← Tulis x sebagai $f^{-1}(y)$

$= \dfrac{y-2}{5}$

Gantikan pemboleh ubah y dengan x,

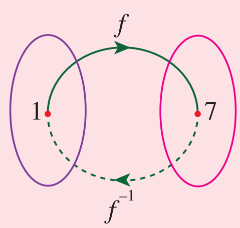
$f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{5}$

Maka, $f^{-1} : x \rightarrow \dfrac{x-2}{5}$.

(b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{5}$

Maka, $f^{-1}(7) = \dfrac{7-2}{5}$

$= 1$



POKET MATEMATIK

Semak kebenaran fungsi songsang $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{5}$ yang diperoleh dalam Contoh 19(a) dengan menggunakan hubungan $ff^{-1}(x) = f^{-1}f(x) = x$.

$ff^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)]$

$= 5\left(\dfrac{x-2}{5}\right) + 2$

$= x$

$f^{-1}f(x) = f^{-1}[f(x)]$

$= f^{-1}(5x + 2)$

$= \dfrac{5x + 2 - 2}{5}$

$= x$

Oleh sebab $ff^{-1}(x) = f^{-1}f(x) = x$, maka $f^{-1} : x \rightarrow \dfrac{x-2}{5}$ ialah fungsi songsang bagi $f : x \rightarrow 5x + 2$.

Latih Diri 1.10

1. Cari f^{-1} bagi setiap fungsi satu dengan satu yang berikut.

(a) $f : x \rightarrow 2x - 5$ (b) $f : x \rightarrow \dfrac{3}{x}, x \neq 0$ (c) $f : x \rightarrow \dfrac{4}{x-1}, x \neq 1$

(d) $f : x \rightarrow \dfrac{5x}{x-6}, x \neq 6$ (e) $f : x \rightarrow \dfrac{x+9}{x-8}, x \neq 8$ (f) $f : x \rightarrow \dfrac{2x-3}{2x-1}, x \neq \dfrac{1}{2}$

2. Fungsi f ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow \dfrac{3-x}{2x}, x \neq 0$, cari

(a) $f^{-1}(4)$,

(b) nilai-nilai x dengan keadaan $f(x) = f^{-1}(x)$.

3. Diberi fungsi $h : x \rightarrow 4x + a$ dan $h^{-1} : x \rightarrow 2bx + \dfrac{5}{8}$, cari nilai pemalar a dan b.

4. Cari fungsi f dalam bentuk yang serupa bagi setiap f^{-1} yang berikut.

(a) $f^{-1} : x \rightarrow 6x + 7$ (b) $f^{-1} : x \rightarrow \dfrac{2-x}{5}$ (c) $f^{-1} : x \rightarrow \dfrac{3x}{x-3}, x \neq 3$

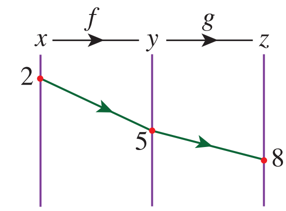
5. Fungsi songsang g^{-1} ditakrifkan oleh $g^{-1} : x \rightarrow \dfrac{4}{2-x}, x \neq k$.

(a) Nyatakan nilai k. (b) Cari $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Latihan Intensif 1.3

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2GHRphR untuk kuiz

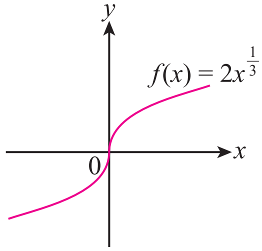
1. Dalam gambar rajah anak panah di sebelah, fungsi f memetakan x kepada y dan fungsi g memetakan y kepada z. Tentukan



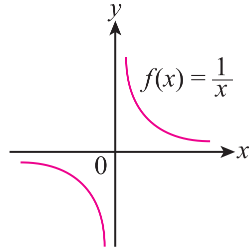
(a) $f(2)$ (b) $g(5)$
(c) $gf(2)$ (d) $f^{-1}(5)$
(e) $g^{-1}(8)$ (f) $f^{-1}g^{-1}(8)$

2. Dengan menggunakan ujian garis mengufuk, tentukan sama ada setiap fungsi berikut mempunyai fungsi songsang atau tidak.

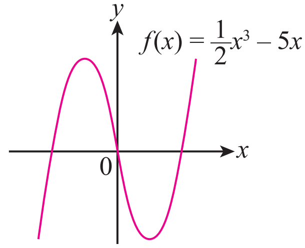
(a)



(b)

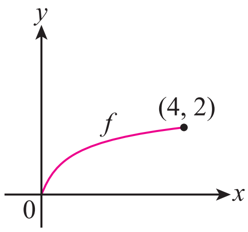


(c)

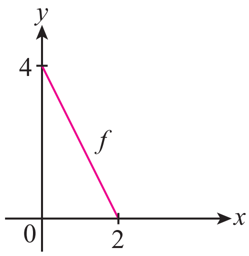


3. Rajah di bawah menunjukkan graf bagi fungsi satu dengan satu, f. Dalam setiap kes, lakarkan graf f^{-1} dan seterusnya nyatakan domain f^{-1}.

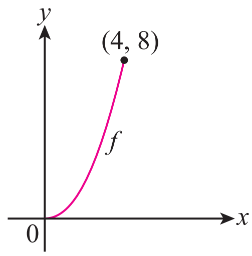
(a)



(b)



(c)



4. Diberi $f : x \rightarrow \dfrac{2x + h}{x - 3}, x \neq 3$ dan $f(4) = 13$, cari
(a) nilai h, (b) $f^{-1}(3)$,
(c) nilai m apabila $f^{-1}(m) = 2$.

5. Fungsi songsang h^{-1} ditakrifkan oleh $h^{-1} : x \rightarrow \dfrac{2}{3 - x}, x \neq 3$, cari
(a) $h(x)$, (b) nilai x dengan keadaan $h(x) = 2$.

6. Dua fungsi f dan g ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow 4x - 17$ dan $g : x \rightarrow \dfrac{5}{2x - 7}, x \neq 3\frac{1}{2}$. Selesaikan persamaan $f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$.

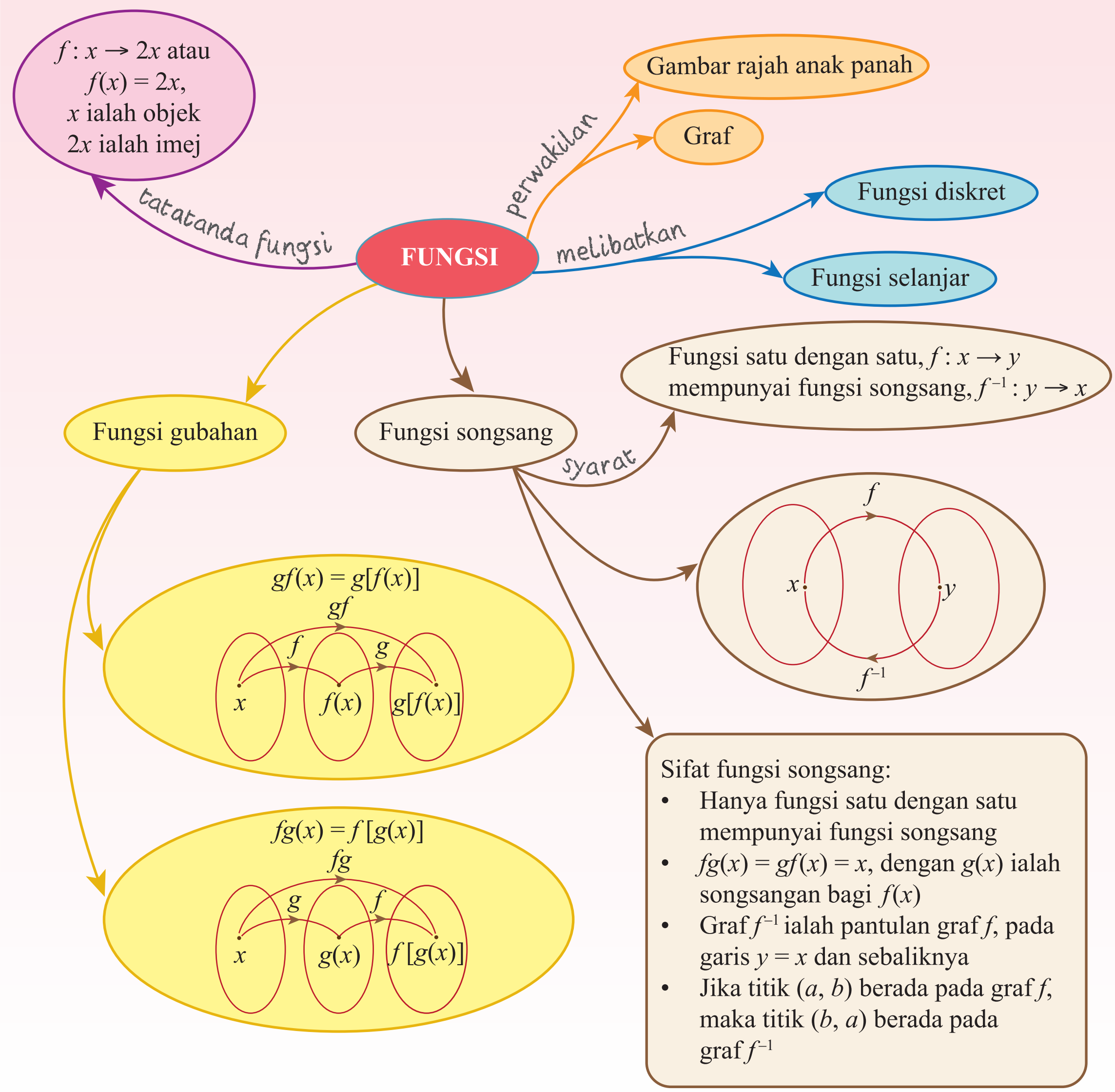
7. Faridah telah melakukan aktiviti senaman pada waktu riadah. Kemudian, Faridah menghitung anggaran laju degupan jantungnya dengan menggunakan fungsi $f(x) = \dfrac{17}{20}(220 - x)$, dengan x ialah usianya.
(a) Tentukan songsangan bagi fungsi ini.
(b) Jika usia Faridah ialah 16 tahun, tentukan anggaran laju degupan jantungnya.

8. Zaki ingin membuat bebola air berbentuk sfera yang boleh menampung $\frac{1}{2}$ cm^3 air. Isi padu sfera, V diberi oleh $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, dengan r ialah jejari sfera. Zaki ingin mengetahui cara untuk menentukan r jika V diberi.

(a) Lukis gambar rajah anak panah bagi fungsi f yang memetakan r kepada V dan songsangannya f^{-1} yang memetakan V kepada r.

(b) Seterusnya, tentukan jejari bebola itu agar dapat menampung isi padu air sesuai mengikut spesifikasinya.

RUMUSAN BAB 1

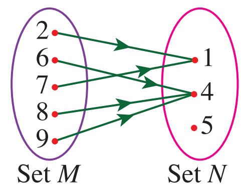


TULIS JURNAL ANDA

Buat carian dalam Internet dan buku-buku berkaitan sejarah penggunaan tatatanda fungsi $y = f(x)$. Buat satu folio digital menggunakan perisian persembahan seperti *Power Point*, *Prezi* atau *Powtoon*.

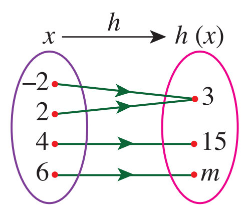
LATIHAN PENGUKUHAN

1. Gambar rajah anak panah di sebelah menunjukkan hubungan antara set M dan set N. TP1



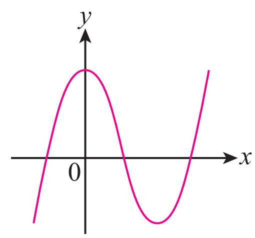
(a) Nyatakan
   (i) imej bagi 2,
   (ii) objek bagi 4.
(b) Adakah hubungan itu merupakan fungsi? Beri alasan anda.
(c) Nyatakan domain, kodomain dan julat bagi hubungan itu.

2. Gambar rajah anak panah di sebelah menunjukkan suatu fungsi h. TP2



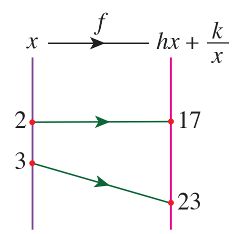
(a) Nyatakan nilai m.
(b) Dengan menggunakan tatatanda fungsi, ungkapkan h dalam sebutan x.

3. Dengan menggunakan ujian garis mencancang, tentukan sama ada graf di sebelah merupakan fungsi atau bukan. Jika ya, adakah fungsi itu fungsi satu dengan satu? Uji dengan melukis garis mengufuk pada graf itu. TP2



4. Suatu fungsi f ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow |x - 3|$ untuk domain $-1 \leqslant x \leqslant 7$. TP3
(a) Lakarkan graf f dan nyatakan julat bagi f.
(b) Cari julat nilai x dengan keadaan $f(x) \leqslant 2$.
(c) Pada graf yang sama di (a), lakarkan graf $y = 2x - 3$ dan seterusnya dapatkan nilai x dengan keadaan $|x - 3| = 2x - 3$.

5. Gambar rajah anak panah di sebelah mewakili sebahagian daripada pemetaan $f : x \rightarrow hx + \dfrac{k}{x}, x \neq 0$, cari TP3

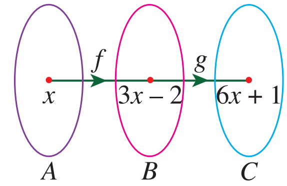


(a) nilai h dan nilai k,
(b) imej bagi 6 di bawah pemetaan ini.

6. Dua fungsi f dan g ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow \dfrac{x + 2}{x - 2}, x \neq 2$ dan $g : x \rightarrow mx + c$. Diberi bahawa $g^{-1}(2) = f(3)$ dan $gf^{-1}(2) = 5$, cari nilai m dan nilai c. TP3

7. Dalam rajah di sebelah, fungsi f memetakan set A kepada set B dan fungsi g memetakan set B kepada set C. Cari TP4

(a) dalam sebutan x, fungsi
    (i) yang memetakan set B kepada set A,
    (ii) $g(x)$.
(b) nilai x dengan keadaan $fg(x) = 4x - 3$.

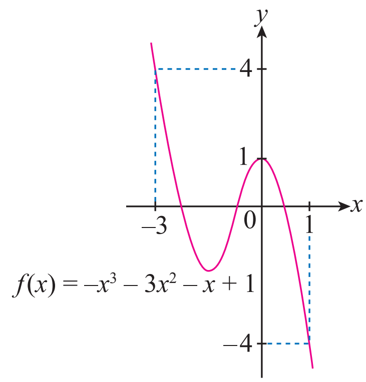


8. Suatu fungsi f ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow \dfrac{m}{x-1} + n, x \neq k$. Diberi $f(2) = 3$ dan $f(3) = 2$, cari TP3

(a) nilai k,
(b) nilai m dan nilai n,
(c) $f^2(x)$,
(d) $f^{-1}(2)$.

9. Rajah di sebelah menunjukkan fungsi $f(x) = -x^3 - 3x^2 - x + 1$ untuk domain $-3 \leqslant x \leqslant 1$. TP3

(a) Nyatakan
    (i) sama ada fungsi f itu diskret atau selanjar,
    (ii) julat f yang sepadan dengan domain yang diberi.
(b) Dengan menggunakan ujian garis mengufuk, tentukan sama ada f mempunyai fungsi songsang atau tidak.



10. Diberi fungsi $f(x) = |x|$ dan $f(x) = x^4$ bukan fungsi satu dengan satu. TP5

(a) Tentukan syarat yang sesuai dalam domain f supaya fungsi baharu menjadi fungsi satu dengan satu.
(b) Daripada (a), cari fungsi songsang bagi setiap f itu.

11. Jika graf bagi suatu fungsi dan songsangannya bersilang, adakah kedua-dua graf ini akan bersilang pada garis $y = x$? Apakah kemungkinan untuk kedua-dua graf ini bersilang pada garis yang lain? TP5

12. Diberi $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, cari $f^{-1}(x)$. TP5

(a) Dengan menggunakan rumus f^{-1} yang diperoleh, tentukan f^{-1} bagi setiap fungsi berikut.
    (i) $f(x) = \dfrac{x + 8}{x - 5}, x \neq 5$
    (ii) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 4}, x \neq -4$
(b) Jika $c \neq 0$, apakah syarat ke atas a, b, c dan d supaya $f = f^{-1}$?

13. Suatu fungsi satu dengan satu f ditakrifkan oleh $f : x \rightarrow x^2 - 2x$ untuk $1 \leqslant x \leqslant 3$. TP6

(a) Dengan menggunakan perisian *GeoGebra*,
    (i) lukis graf f dan daripada graf, nyatakan julat bagi f,
    (ii) lukis graf f^{-1} pada satah yang sama dan nyatakan domain f^{-1}.
(b) Apakah yang dapat anda katakan tentang julat f dan domain f^{-1} serta domain f dan julat f^{-1}? Seterusnya, pada satah yang sama, lukis garis $y = x$.
    (i) Adakah graf f^{-1} ialah pantulan bagi graf f pada garis itu?
    (ii) Adakah titik $(0, 2)$ pada graf f^{-1} merupakan pantulan bagi titik $(2, 0)$ pada graf f pada garis $y = x$? Apakah kesimpulan yang dapat anda buat?

14. Harga p, dalam RM, bagi suatu barangan dan kuantiti x yang dijual mengikut persamaan permintaan $p = 100 - \frac{1}{4}x$ untuk $0 \leqslant x \leqslant 400$. Manakala kos C, dalam RM, untuk mengeluarkan x unit ialah $C = \frac{\sqrt{x}}{25} + 600$. Anggapkan semua barangan yang dikeluarkan terjual, cari TP4

(a) kos C sebagai fungsi bagi harga p,

(b) kos untuk mengeluarkan barangan itu jika harga untuk satu unit barang dijual dengan harga RM36.

15. Tempoh T, dalam saat, bagi suatu bandul ringkas ialah fungsi bagi panjang l, dalam meter, ditakrifkan oleh $T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, dengan keadaan $g = 10$ m s^{-2} ialah pecutan bagi graviti. Dengan menggunakan perisian *GeoGebra*, lukiskan graf fungsi ini dan pada satah yang sama, lukiskan graf bagi fungsi berikut.

(a) $T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{l+4}{g}}$

(b) $T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{4l}{g}}$

Bagaimanakah perubahan dalam panjang memberi kesan kepada tempoh, T bandul itu? Bincangkan. TP5

Penerokaan MATEMATIK

Jadual di bawah menunjukkan isi padu petrol yang digunakan oleh sebuah kereta di sebatang lebuh raya berbanding dengan jarak yang dilalui. Katakan l ialah isi padu petrol, dalam liter, yang digunakan dan d ialah jarak, dalam km, yang dilalui oleh kereta itu.

Petrol yang digunakan (l)	Jarak yang dilalui, dalam km (d)
4	48
8	96
12	144
16	192
20	240

1. Berdasarkan jadual di atas,

(a) berapakah jarak yang boleh dilalui oleh kereta itu menggunakan 1 liter petrol?

(b) tentukan jarak yang dilalui, d, sebagai fungsi isi padu petrol yang digunakan, l.

$d(l) =$ ________________

2. Dengan menggunakan perisian *GeoGebra*, lukis fungsi d yang diperoleh dalam soalan 1(b) dan daripada graf, tentukan yang berikut.

(a) Berapakah isi padu petrol yang digunakan untuk perjalanan 300 km?

(b) Berapakah jarak yang dapat dilalui untuk 100 l petrol?

BAB 2

Fungsi Kuadratik

Apakah yang akan dipelajari?

- Persamaan dan Ketaksamaan Kuadratik
- Jenis-jenis Punca Persamaan Kuadratik
- Fungsi Kuadratik

Senarai Standard Pembelajaran

bit.ly/2CI9zhH

KATA KUNCI

Penyempurnaan kuasa dua	*Completing the square*
Punca	*Root*
Bentuk am	*General form*
Ketaksamaan kuadratik	*Quadratic inequality*
Garis nombor	*Number line*
Pembezalayan	*Discriminant*
Punca nyata	*Real root*
Punca khayalan	*Imaginary root*
Bentuk verteks	*Vertex form*
Paksi simetri	*Axis of symmetry*
Nilai maksimum	*Maximum value*
Nilai minimum	*Minimum value*

Keratan rentas bagi *skateboard ramp* yang berbentuk parabola boleh dimodelkan dengan fungsi kuadratik, iaitu $f(x) = ax^2 + bx + c$. Untuk pengetahuan anda, bentuk dan kelebaran suatu *skateboard ramp* boleh diubah suai melalui pengetahuan fungsi kuadratik. Apakah bentuk *skateboard ramp* yang terbaik dari aspek keselamatan?

Tahukah Anda?

Piring satelit mempunyai keupayaan untuk menumpu tenaga pada titik fokus. Satelit, televisyen, radar dan menara telekomunikasi ialah contoh objek yang menumpu pada sifat pantulan parabola.

Berdasarkan sejarah pada zaman dahulu, Archimedes telah membantu tentera Greek dengan menggunakan cermin parabola untuk membakar kapal tentera Rom yang ingin menawan bandar Greek, Syracuse pada 213 S.M.

Untuk maklumat lanjut:

bit.ly/2J4iw8y

SIGNIFIKAN BAB INI

- Ahli astronomi menggunakan konsep fungsi kuadratik dalam rekaan teleskop. Cermin berbentuk parabola dapat menumpu dan memantulkan cahaya pada suatu titik.
- Dalam bidang kejuruteraan, jurutera menggunakan aplikasi konsep fungsi kuadratik untuk menentukan jenis beban yang dapat ditampung oleh sebuah jambatan.

Imbas kod *QR* ini untuk menonton video permainan *skateboard* di Malaysia.

bit.ly/2V2I1ys

2.1 Persamaan dan Ketaksamaan Kuadratik

Menyelesaikan persamaan kuadratik menggunakan kaedah penyempurnaan kuasa dua dan rumus

Kebanyakan situasi yang berlaku dalam kehidupan seharian kita adalah berkaitan dengan persamaan. Salah satu persamaan itu ialah persamaan kuadratik. Pertimbangkan situasi ini:

Luas sebuah bingkai gambar yang berbentuk segi empat tepat ialah 100 cm^2. Jika panjangnya ialah 3 cm lebih daripada lebarnya, tuliskan satu persamaan yang memenuhi situasi ini.

Andaikan lebar bingkai ialah x cm dan panjangnya 3 cm lebih daripada lebar, iaitu $(x + 3)$ cm.

Maka:
$$x(x + 3) = 100$$
$$x^2 + 3x = 100$$
$$x^2 + 3x - 100 = 0$$

Perhatikan bahawa persamaan ini mempunyai satu pemboleh ubah x dan kuasa tertinggi pemboleh ubahnya ialah 2. Maka, persamaan ini dikenali sebagai persamaan kuadratik dalam bentuk am. Secara umumnya, suatu persamaan kuadratik bentuk am boleh ditulis sebagai:

$ax^2 + bx + c = 0$ dengan keadaan a, b dan c ialah pemalar dan $a \neq 0$.

Bagaimanakah suatu persamaan kuadratik diselesaikan? Apakah yang dimaksudkan dengan menyelesaikan persamaan kuadratik?

INKUIRI 1 Berpasangan PAK-21

Tujuan: Meneroka penyelesaian persamaan kuadratik menggunakan perisian geometri dinamik

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik butang *point* dan tandakan *A* dan *B* pada titik-titik persilangan graf $y = 3x^2 + 11x - 4$ dengan paksi-x.
3. Catatkan koordinat bagi titik *A* dan titik *B*. Kemudian, perhatikan koordinat-x bagi titik *A* dan titik *B* itu.
4. Apakah kesimpulan yang dapat dibuat tentang koordinat-x bagi titik *A* dan titik *B* itu?
5. Bincang bersama-sama pasangan anda dan kongsi dapatan yang diperoleh dengan rakan yang lain.

bit.ly/2vHjS0Y

Hasil daripada Inkuiri 1, nilai-nilai x pada kedua-dua titik persilangan itu, iaitu $x = -4$ dan $x = \frac{1}{3}$ ialah penyelesaian atau punca-punca bagi persamaan $y = 3x^2 + 11x - 4$ apabila $y = 0$.

2.1.1

Maka, dapat disimpulkan bahawa:

> Penyelesaian atau punca-punca bagi persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ ialah koordinat-x bagi titik-titik persilangan antara graf $y = ax^2 + bx + c$ dengan paksi-x.

Anda telah mempelajari cara untuk menyelesaikan persamaan kuadratik menggunakan kaedah pemfaktoran. Selain itu, penyelesaian bagi persamaan kuadratik juga boleh diperoleh dengan menggunakan kaedah **penyempurnaan kuasa dua** dan **rumus**.

A Kaedah penyempurnaan kuasa dua

Contoh 1

Selesaikan persamaan berikut dengan menggunakan kaedah penyempurnaan kuasa dua.

(a) $x^2 + 4x - 7 = 0$

(b) $-3x^2 + 6x - 1 = 0$

Penyelesaian

(a)
$$x^2 + 4x - 7 = 0$$
$$x^2 + 4x = 7$$

Pindahkan sebutan pemalar di sebelah kanan persamaan

$$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 7 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

Tambahkan sebutan $\left(\frac{\text{pekali } x}{2}\right)^2$ di sebelah kiri dan kanan persamaan

$$x^2 + 4x + 2^2 = 7 + 2^2$$
$$(x + 2)^2 = 11$$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$$x + 2 = \pm\sqrt{11}$$
$$x = -5.317 \quad \text{atau} \quad x = 1.317$$

Maka, penyelesaian bagi persamaan $x^2 + 4x - 7 = 0$ ialah -5.317 dan 1.317.

(b)
$$-3x^2 + 6x - 1 = 0$$
$$x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$$

Bahagikan kedua-dua belah persamaan dengan -3 supaya pekali x^2 menjadi 1

$$x^2 - 2x = -\frac{1}{3}$$
$$x^2 - 2x + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{-2}{2}\right)^2$$

Tambahkan $\left(\frac{-2}{2}\right)^2$ di kedua-dua belah persamaan

$$x^2 - 2x + (-1)^2 = -\frac{1}{3} + (-1)^2$$
$$(x - 1)^2 = \frac{2}{3}$$
$$x - 1 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$x = 0.1835 \quad \text{atau} \quad x = 1.8165$$

Maka, penyelesaian bagi persamaan $-3x^2 + 6x - 1 = 0$ ialah 0.1835 dan 1.8165.

IMBAS KEMBALI

Kaedah pemfaktoran

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x + 2)(x + 3) = 0$

$x = -2$ atau $x = -3$

QR

Kaedah pemfaktoran menggunakan jubin algebra.

bit.ly/2ESbxO4

Muzium Matematik

Ahli matematik Parsi, Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khawarizmi menggunakan kaedah yang serupa dengan penyempurnaan kuasa dua untuk menyelesaikan persamaan kuadratik.

2.1.1

B Kaedah rumus

Rumus bagi penyelesaian suatu persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ diberi sebagai:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh 2

Selesaikan persamaan $2x^2 - 2x - 3 = 0$ dengan menggunakan rumus.

Penyelesaian

Bandingkan persamaan yang diberi dengan persamaan bentuk am $ax^2 + bx + c = 0$. Maka, $a = 2$, $b = -2$ dan $c = -3$.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{28}}{4}$$

$$x = \frac{2 - \sqrt{28}}{4} \quad \text{atau} \quad x = \frac{2 + \sqrt{28}}{4}$$

$$= -0.823 \quad \text{atau} \quad = 1.823$$

Maka, penyelesaian bagi persamaan $2x^2 - 2x - 3 = 0$ ialah -0.823 dan 1.823.

Cabar Minda

Terbitkan rumus kuadratik menggunakan kaedah penyempurnaan kuasa dua.

SUMBANG SARAN

Nyatakan kaedah lain untuk menyelesaikan suatu persamaan kuadratik selain daripada kaedah penyempurnaan kuasa dua dan rumus. Apakah kaedah pilihan anda? Terangkan sebab bagi pemilihan kaedah itu.

Muzium Matematik

Ahli matematik dan astronomi India, Brahmagupta menghasilkan rumus bagi penyelesaian persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ yang setara dengan $x = \frac{\sqrt{4ac + b^2 - b}}{2a}$.

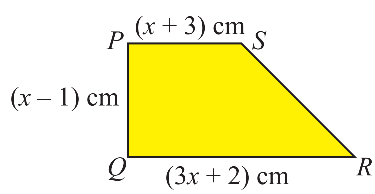
Latih Diri 2.1

1. Selesaikan persamaan kuadratik berikut dengan menggunakan kaedah penyempurnaan kuasa dua. Berikan jawapan betul kepada tiga tempat perpuluhan.
   (a) $x^2 + 4x - 9 = 0$ (b) $x^2 - 3x - 5 = 0$ (c) $-x^2 - 6x + 9 = 0$
   (d) $2x^2 - 6x + 3 = 0$ (e) $4x^2 - 8x + 1 = 0$ (f) $-2x^2 + 7x + 6 = 0$

2. Selesaikan persamaan kuadratik berikut dengan menggunakan rumus. Berikan jawapan betul kepada tiga tempat perpuluhan.
   (a) $x^2 - 4x - 7 = 0$ (b) $2x^2 + 2x - 1 = 0$ (c) $3x^2 - 8x + 1 = 0$
   (d) $4x^2 - 3x - 2 = 0$ (e) $(x - 1)(x - 3) = 5$ (f) $(2x - 3)^2 = 6$

3. (a) Panjang pepenjuru bagi sebuah segi empat tepat ialah 10 cm. Jika panjangnya lebih 2 cm daripada lebar, cari ukuran panjang dan lebar segi empat tepat itu.
   (b) Cari ukuran bagi sebuah segi empat tepat dengan perimeter 26 cm dan luas 40 cm^2.

4. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah trapezium $PQRS$ dengan keadaan $PQ = (x - 1)$ cm, $PS = (x + 3)$ cm dan $QR = (3x + 2)$ cm. Diberi luas trapezium itu ialah 17 cm^2, cari nilai x.



Membentuk persamaan kuadratik daripada punca-punca

Persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ boleh ditulis sebagai

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \cdots ①$$

Jika α dan β ialah punca-punca bagi persamaan kuadratik, maka

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$
$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \quad \cdots ②$$

Bandingkan ① dan ②,

$$-(\alpha + \beta) = \frac{b}{a} \quad \text{dan} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$
$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

Secara am, perbandingan ini dapat dirumuskan seperti berikut:

$$\text{Hasil tambah punca} = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$
$$\text{Hasil darab punca} = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

Oleh itu, persamaan kuadratik dengan punca-punca α dan β boleh ditulis sebagai:

$$x^2 - (\text{hasil tambah punca})x + (\text{hasil darab punca}) = 0$$

IMBAS KEMBALI

Identiti pemfaktoran
(a) $(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$
$= x^2 + 2xy + y^2$
(b) $(x - y)^2 = (x - y)(x - y)$
$= x^2 - 2xy + y^2$
(c) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

SUMBANG SARAN

Diberi $\alpha = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dan $\beta = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,
(a) tunjukkan bahawa $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$,
(b) ungkapkan hasil darab $\alpha\beta$ dalam sebutan a dan c.
Bincang bersama rakan anda.

Contoh 3

Bentukkan persamaan kuadratik dengan punca-punca 3 dan –5.

Penyelesaian

Diberi $\alpha = 3$ dan $\beta = -5$.
Hasil tambah punca, $\alpha + \beta = 3 + (-5)$
$= -2$
Hasil darab punca, $\alpha\beta = 3 \times (-5)$
$= -15$
Maka, persamaan kuadratik dengan punca-punca 3 dan –5 ialah

$$x^2 - (\text{hasil tambah punca})x + (\text{hasil darab punca}) = 0$$
$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$
$$x^2 - (-2)x + (-15) = 0$$
$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Kaedah Alternatif

$$(x - 3)(x + 5) = 0$$
$$x^2 + 5x - 3x - 15 = 0$$
$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Contoh 4

Jika α dan β ialah punca-punca bagi persamaan kuadratik $2x^2 + x = 4$, bentukkan persamaan yang mempunyai punca-punca berikut.

(a) $\alpha + 3, \beta + 3$
(b) $2\alpha, 2\beta$
(c) α^2, β^2

Penyelesaian

$2x^2 + x - 4 = 0$ dengan $a = 2$, $b = 1$ dan $c = -4$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$ dan $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{4}{2} = -2$

(a) Hasil tambah punca:

$$\begin{aligned}(\alpha + 3) + (\beta + 3) &= (\alpha + \beta) + 6\\ &= -\frac{1}{2} + 6\\ &= \frac{11}{2}\end{aligned}$$

Hasil darab punca:

$$\begin{aligned}(\alpha + 3)(\beta + 3) &= \alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 9\\ &= -2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 9\\ &= \frac{11}{2}\end{aligned}$$

Oleh itu, persamaan kuadratik dengan punca-punca $\alpha + 3$ dan $\beta + 3$ ialah

$$x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{11}{2} = 0 \leftarrow$$

Darabkan kedua-dua belah persamaan dengan 2

$$2x^2 - 11x + 11 = 0$$

(b) Hasil tambah punca:

$$\begin{aligned}2\alpha + 2\beta &= 2(\alpha + \beta)\\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= -1\end{aligned}$$

Hasil darab punca:

$$\begin{aligned}(2\alpha)(2\beta) &= 4\alpha\beta\\ &= 4(-2)\\ &= -8\end{aligned}$$

Oleh itu, persamaan kuadratik dengan punca-punca 2α dan 2β ialah

$$\begin{aligned}x^2 - (-1)x - 8 &= 0\\ x^2 + x - 8 &= 0\end{aligned}$$

(c) Hasil tambah punca:

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2(-2)\\ &= \frac{1}{4} + 4\\ &= \frac{17}{4}\end{aligned}$$

Hasil darab punca:

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2 &= (\alpha\beta)^2\\ &= (-2)^2\\ &= 4\end{aligned}$$

Oleh itu, persamaan kuadratik dengan punca-punca α^2 dan β^2 ialah

$$x^2 - \frac{17}{4}x + 4 = 0 \leftarrow$$

Darabkan kedua-dua belah persamaan dengan 4

$$4x^2 - 17x + 16 = 0$$

Latih Diri 2.2

1. Bentukkan persamaan kuadratik yang mempunyai punca-punca berikut.

(a) 2 dan 6 (b) −1 dan 4 (c) −4 dan −7 (d) $\frac{1}{5}$ dan −5

2. Persamaan kuadratik $x^2 + (p - 5)x + 2q = 0$ mempunyai punca-punca −3 dan 6. Cari nilai p dan nilai q.

3. Jika α dan β ialah punca-punca bagi persamaan kuadratik $5x^2 - 10x - 9 = 0$, bentukkan persamaan kuadratik dengan punca-punca yang berikut.

(a) $\alpha + 2$ dan $\beta + 2$ (b) 5α dan 5β (c) $\alpha - 1$ dan $\beta - 1$ (d) $\frac{\alpha}{3}$ dan $\frac{\beta}{3}$

4. Jika α dan β ialah punca-punca bagi persamaan kuadratik $2x^2 + 5x = 1$, cari persamaan dengan punca-punca berikut.

(a) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (b) $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right), \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$ (c) α^2, β^2 (d) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$

5. Persamaan kuadratik $2x^2 = 6x + 3$ mempunyai punca-punca p dan q. Cari persamaan kuadratik dengan punca-punca p^2q dan pq^2.

Menyelesaikan ketaksamaan kuadratik

Satu ketaksamaan dengan ungkapan kuadratik pada satu sisi dan sifar pada sisi yang satu lagi, disebut sebagai ketaksamaan kuadratik dalam satu pemboleh ubah. Misalnya, $2x^2 + 7x - 4 \leqslant 0$ dan $(x + 1)(x - 3) > 0$ ialah ketaksamaan kuadratik dalam satu pemboleh ubah, x. Untuk menyelesaikan ketaksamaan kuadratik seperti $(x + 1)(x - 3) > 0$, kita perlu mencari julat nilai x supaya ungkapan di sebelah kiri adalah lebih besar daripada sifar.

Tiga kaedah yang boleh digunakan untuk menyelesaikan suatu ketaksamaan kuadratik ialah kaedah **lakaran graf**, **garis nombor** dan **jadual**.

INKUIRI 2 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Menyelesaikan ketaksamaan kuadratik dengan kaedah lakaran graf, garis nombor dan jadual

Arahan:

1. Pertimbangkan ketaksamaan kuadratik $(x + 1)(x - 3) > 0$ dan $(x + 1)(x - 3) < 0$.

2. Bentukkan tiga kumpulan dan setiap kumpulan perlu memilih satu daripada tiga kaedah penyelesaian berikut.

Kaedah lakaran graf

- Selesaikan persamaan kuadratik $(x + 1)(x - 3) = 0$
- Lakarkan graf bagi $y = (x + 1)(x - 3)$.
- Tanda dan tentukan julat nilai x pada lakaran graf tersebut apabila $(x + 1)(x - 3) > 0$ $(y > 0)$ dan $(x + 1)(x - 3) < 0$ $(y < 0)$.

2.1.2 2.1.3

Kaedah garis nombor

- Selesaikan persamaan kuadratik $(x + 1)(x - 3) = 0$.
- Lukis garis nombor pada sehelai kertas.
- Dengan memilih nilai-nilai x yang memuaskan $x < -1$, $x > 3$ dan $-1 < x < 3$ pada garis nombor itu dan menggantikannya ke dalam $(x + 1)(x - 3)$, tentu dan sahkan julat nilai x apabila $(x + 1)(x - 3) > 0$ dan $(x + 1)(x - 3) < 0$.

Kaedah jadual

- Salin dan lengkapkan jadual berikut dengan tanda (+) atau tanda (–) untuk setiap faktor bagi persamaan kuadratik $(x + 1)(x - 3) = 0$.

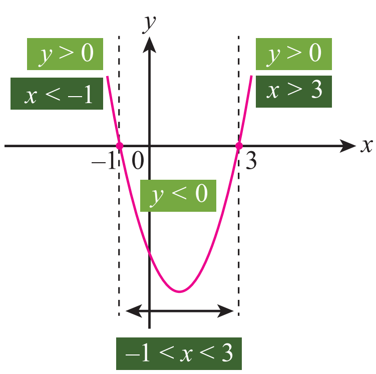
	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$(x + 1)$					
$(x - 3)$					
$(x + 1)(x - 3)$					

- Daripada keputusan yang diperoleh dalam jadual itu, apakah julat nilai x apabila $(x + 1)(x - 3) > 0$ dan $(x + 1)(x - 3) < 0$?

3. Bandingkan hasil dapatan kumpulan anda dengan kumpulan yang lain.
4. Lakukan perbincangan secara menyeluruh tentang ketiga-tiga kaedah itu yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu ketaksamaan kuadratik.

Hasil daripada Inkuiri 2, penyelesaian bagi ketaksamaan kuadratik $(x + 1)(x - 3) > 0$ dan $(x + 1)(x - 3) < 0$ dengan kaedah lakaran graf, garis nombor dan jadual yang diperoleh ditunjukkan seperti berikut.

Lakaran graf

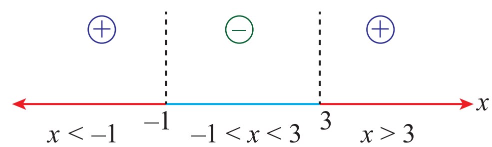


Garis nombor

Titik ujian –2:
$(-2 + 1)(-2 - 3) > 0$

Titik ujian 0:
$(0 + 1)(0 - 3) < 0$

Titik ujian 4:
$(4 + 1)(4 - 3) > 0$



Jadual

	Julat nilai x		
	$x < -1$	$-1 < x < 3$	$x > 3$
$(x + 1)$	–	+	+
$(x - 3)$	–	–	+
$(x + 1)(x - 3)$	+	–	+

Daripada ketiga-tiga hasil dapatan ini, dapat disimpulkan bahawa:

Bagi suatu persamaan kuadratik dalam bentuk $(x - a)(x - b) = 0$, dengan $a < b$,
(a) jika $(x - a)(x - b) > 0$, maka $x < a$ atau $x > b$,
(b) jika $(x - a)(x - b) < 0$, maka $a < x < b$.

2.1.3

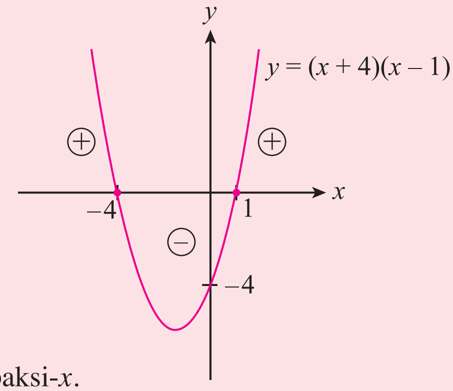
Contoh 5

Cari julat nilai x bagi ketaksamaan kuadratik $(2x – 1)(x + 4) \geqslant x + 4$ menggunakan kaedah
(a) lakaran graf
(b) garis nombor
(c) jadual

Penyelesaian

(a) $(2x – 1)(x + 4) \geqslant x + 4$

$$2x^2 + 7x – 4 \geqslant x + 4$$
$$2x^2 + 6x – 8 \geqslant 0$$
$$x^2 + 3x – 4 \geqslant 0$$
$$(x + 4)(x – 1) \geqslant 0$$



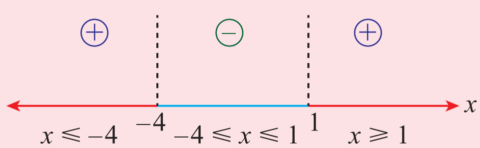
Apabila $(x + 4)(x – 1) = 0$, $x = –4$ atau $x = 1$.

Graf akan menyilang paksi-x pada titik $x = –4$ dan $x = 1$.

Oleh sebab $(x + 4)(x – 1) \geqslant 0$, maka julat nilai x ditentukan pada lengkung graf yang berada di atas paksi-x. Maka, julat nilai x ialah $x \leqslant –4$ atau $x \geqslant 1$.

(b)

Titik ujian –5:	Titik ujian 0:	Titik ujian 2:
$(–5 + 4)(–5 – 1) \geqslant 0$	$(0 + 4)(0 – 1) \leqslant 0$	$(2 + 4)(2 – 1) \geqslant 0$



Oleh sebab $(x + 4)(x – 1) \geqslant 0$, maka julat nilai x ditentukan pada bahagian positif garis nombor.

Maka, julat nilai x ialah $x \leqslant –4$ atau $x \geqslant 1$.

(c)

	Julat nilai x		
	$x \leqslant -4$	$-4 \leqslant x \leqslant 1$	$x \geqslant 1$
$(x + 4)$	–	+	+
$(x – 1)$	–	–	+
$(x + 4)(x – 1)$	+	–	+

Oleh sebab $(x + 4)(x – 1) \geqslant 0$, maka julat nilai x ditentukan pada bahagian positif dalam jadual.

Maka, julat nilai x ialah $x \leqslant –4$ atau $x \geqslant 1$.

Latih Diri 2.3

1. Selesaikan setiap ketaksamaan kuadratik yang berikut menggunakan kaedah lakaran graf, garis nombor atau jadual.
   (a) $x^2 < 4$ (b) $(2 - x)(8 - x) < 0$ (c) $x^2 \leqslant 4x + 12$
   (d) $x(x - 2) \geqslant 3$ (e) $(x + 2)^2 < 2x + 7$ (f) $(3x + 1)(5 - x) > 13$

2. Cari julat nilai x bagi $3x^2 - 5x \geqslant 16 + x(2x + 1)$.

Latihan Intensif 2.1

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2SHb06q untuk kuiz

1. Selesaikan persamaan kuadratik $3x(x - 5) = 2x - 1$. Berikan jawapan betul kepada tiga tempat perpuluhan.
2. Diberi persamaan kuadratik $2(x - 5)^2 = 4(x + 7)$,
   (a) ungkapkan persamaan tersebut dalam bentuk am, iaitu $ax^2 + bx + c = 0$.
   (b) nyatakan hasil tambah dan hasil darab punca bagi persamaan tersebut.
3. Jika α dan β ialah punca-punca bagi persamaan kuadratik $2x^2 + 6x - 7 = 0$, bentukkan persamaan dengan punca-punca yang berikut.
   (a) $\dfrac{1}{2\alpha + 1}, \dfrac{1}{2\beta + 1}$ (b) $\dfrac{5\alpha}{\beta}, \dfrac{5\beta}{\alpha}$ (c) $\alpha + 3\beta, 3\alpha + \beta$
4. Jika satu punca bagi persamaan $3x^2 + 19x + k = 0$ ialah -7, cari nilai pemalar k.
5. Diberi persamaan kuadratik $rx^2 + (r - 1)x + 2r + 3 = 0$, dengan r ialah integer bukan sifar, cari nilai r dengan keadaan
   (a) satu punca adalah negatif punca yang satu lagi,
   (b) satu punca adalah salingan punca yang satu lagi,
   (c) satu punca adalah dua kali punca yang satu lagi.
6. Satu punca bagi persamaan $x^2 - 8x + m = 0$ ialah tiga kali punca yang satu lagi, cari nilai pemalar m dan punca-puncanya.
7. Persamaan $x^2 + 2x = k(x - 1)$ mempunyai punca bukan sifar dengan beza antara punca adalah 2, cari nilai setiap punca dan nilai k.
8. Punca-punca persamaan $x^2 + px + 27 = 0$ adalah mengikut nisbah $1 : 3$. Cari nilai-nilai p.
9. Diberi 3 dan $h + 1$ ialah punca-punca bagi persamaan $x^2 + (k - 1)x + 9 = 0$, cari nilai-nilai yang mungkin bagi h dan k.
10. Dua punca bagi persamaan $x^2 - 8x + c = 0$ ialah α dan $\alpha + 3d$, ungkapkan c dalam sebutan d.
11. Selesaikan setiap ketaksamaan kuadratik yang berikut.
    (a) $2x^2 \geqslant x + 1$ (b) $(x - 3)^2 \leqslant 5 - x$ (c) $(1 - x)^2 + 2x < 17$
12. Cari nilai m dan nilai n bagi setiap ketaksamaan kuadratik berikut.
    (a) $x^2 + mx < n$ yang hanya dipenuhi oleh $-3 < x < 4$.
    (b) $2x^2 + m > nx$ yang hanya dipenuhi oleh $x < -2$ atau $x > 5$.
13. Diberi $y = 2x^2 + bx + 12$ dan $y < 0$ jika $2 < x < a$, cari nilai bagi a dan b.

2.2 Jenis-jenis Punca Persamaan Kuadratik

Jenis-jenis punca persamaan kuadratik dan nilai pembezalayan

Anda telah mempelajari bahawa punca-punca bagi suatu persamaan kuadratik boleh dicari dengan menggunakan rumus $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Adakah jenis-jenis punca suatu persamaan kuadratik berkait rapat dengan nilai $b^2 - 4ac$ dalam rumus itu? Mari kita teroka.

INKUIRI 3 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Meneroka perkaitan antara jenis punca persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ dengan nilai $b^2 - 4ac$

Arahan:
1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik satu persatu pada petak yang memaparkan graf bagi $y = x^2 + 5x + 4$, $y = x^2 - 6x + 9$ dan $y = 9x^2 - 6x + 2$.
3. Perhatikan kedudukan graf-graf tersebut.
4. Kenal pasti nilai-nilai a, b dan c serta punca-punca bagi setiap graf tersebut apabila $y = 0$.
5. Bincang bersama-sama ahli kumpulan tentang perkaitan antara nilai $b^2 - 4ac$ dengan jenis punca yang diperoleh.
6. Bentangkan hasil dapatan kumpulan masing-masing di hadapan kelas.

bit.ly/2RS5Jff

Hasil daripada Inkuiri 3, perhatikan bahawa jenis-jenis punca persamaan kuadratik dapat ditentukan daripada nilai $b^2 - 4ac$ yang dikenali sebagai **pembezalayan** dan biasanya diwakili dengan simbol D.
Secara amnya:

1. Jika pembezalayan $b^2 - 4ac > 0$, persamaan mempunyai dua punca nyata dan berbeza.
2. Jika pembezalayan $b^2 - 4ac = 0$, persamaan mempunyai dua punca nyata yang sama.
3. Jika pembezalayan $b^2 - 4ac < 0$, persamaan tidak mempunyai punca nyata.

Bagi persamaan kuadratik $9x^2 - 6x + 2 = 0$ yang tidak mempunyai punca, perhatikan bahawa pembezalayannya bernilai negatif. Oleh sebab $\sqrt{-36}$ bukan suatu nombor nyata, maka persamaan kuadratik ini tidak mempunyai punca nyata. Punca kuasa dua bagi suatu nombor negatif dikenali sebagai nombor khayalan dan diwakili oleh $i = \sqrt{-1}$. Maka, punca bagi persamaan kuadratik $9x^2 - 6x + 2 = 0$ boleh ditulis sebagai $x = \frac{6 \pm \sqrt{36(-1)}}{18} = \frac{6 \pm 6i}{18} = \frac{1 \pm i}{3}$.

TIP PINTAR

Apabila pembezalayan $b^2 - 4ac \geqslant 0$, persamaan mempunyai punca nyata.

Cabar Minda

Apakah jenis punca persamaan kuadratik jika pembezalayan $b^2 - 4ac \leqslant 0$?

SUMBANG SARAN

Tentukan punca-punca bagi persamaan kuadratik berikut. Berikan jawapan anda dalam sebutan nombor khayalan, i, dengan $i = \sqrt{-1}$.
(a) $x^2 + 4x + 5 = 0$
(b) $x^2 - 2x + 3 = 0$
(c) $2x^2 - 6x + 5 = 0$

2.2.1

Contoh 6

Tentukan jenis punca bagi setiap persamaan kuadratik berikut.
(a) $x^2 + 5x - 6 = 0$
(b) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$
(c) $2x^2 - 4x + 5 = 0$

Penyelesaian

(a) $x^2 + 5x - 6 = 0$ dengan $a = 1$, $b = 5$ dan $c = -6$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 5^2 - 4(1)(-6) \\ &= 49\ (> 0) \end{aligned}$$

Maka, persamaan $x^2 + 5x - 6 = 0$ mempunyai dua punca nyata dan berbeza.

(b) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ dengan $a = -4$, $b = 4$ dan $c = -1$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 4^2 - 4(-4)(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Maka, persamaan $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ mempunyai dua punca nyata yang sama.

(c) $2x^2 - 4x + 5 = 0$ dengan $a = 2$, $b = -4$ dan $c = 5$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-4)^2 - 4(2)(5) \\ &= -24\ (< 0) \end{aligned}$$

Maka, persamaan $2x^2 - 4x + 5 = 0$ tidak mempunyai punca nyata.

Cabar Minda

Mengapakah nilai pembezalayan perlu dicari terlebih dahulu semasa menentukan jenis punca persamaan kuadratik?

Celik Teknologi

Semak jawapan anda dengan aplikasi *Mathpapa* yang boleh dimuat turun daripada peranti mudah alih anda.

bit.ly/2LGClgg

Latih Diri 2.4

1. Cari pembezalayan dan tentukan jenis-jenis punca bagi setiap persamaan kuadratik berikut.
(a) $x^2 + 4x + 1 = 0$
(b) $x^2 = 8(x - 2)$
(c) $5x^2 + 4x + 6 = 0$
(d) $-3x^2 + 7x + 5 = 0$
(e) $-x^2 + 10x - 25 = 0$
(f) $(2x - 1)(x + 3) = 0$

Menyelesaikan masalah melibatkan jenis-jenis punca persamaan kuadratik

Pembezalayan, D yang menentukan jenis-jenis punca bagi suatu persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ boleh digunakan untuk:
(a) Mencari suatu nilai yang tidak diketahui dalam persamaan kuadratik.
(b) Menerbitkan suatu hubungan.

Contoh 7

(a) Persamaan kuadratik $x^2 + k + 3 = kx$, dengan k ialah pemalar, mempunyai dua punca nyata yang sama. Cari nilai-nilai yang mungkin bagi k.
(b) Punca-punca persamaan $(p + 2)x^2 - 2px = 3 - p$, dengan p ialah pemalar adalah nyata dan berbeza. Cari julat nilai p.
(c) Diberi persamaan kuadratik $x^2 + 4x + 13 = m(2 - x)$, dengan m ialah pemalar, tidak mempunyai punca nyata, cari julat nilai m.

Penyelesaian

(a)
$$x^2 + k + 3 = kx$$
$$x^2 - kx + k + 3 = 0$$
Susun semula persamaan dalam bentuk am

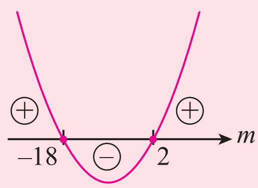
$a = 1$, $b = -k$ dan $c = k + 3$
$$b^2 - 4ac = 0$$
Dua punca nyata yang sama
$$(-k)^2 - 4(1)(k + 3) = 0$$
$$k^2 - 4k - 12 = 0$$
$$(k + 2)(k - 6) = 0$$
$$k = -2 \quad \text{atau} \quad k = 6$$

(b)
$$(p + 2)x^2 - 2px = 3 - p$$
$$(p + 2)x^2 - 2px + p - 3 = 0$$
Susun semula persamaan dalam bentuk am

$a = p + 2$, $b = -2p$ dan $c = p - 3$
$$b^2 - 4ac > 0$$
Dua punca nyata dan berbeza
$$(-2p)^2 - 4(p + 2)(p - 3) > 0$$
$$4p^2 - 4(p^2 - p - 6) > 0$$
$$4p + 24 > 0$$
$$p > -6$$

(c)
$$x^2 + 4x + 13 = m(2 - x)$$
$$x^2 + 4x + 13 = 2m - mx$$
$$x^2 + 4x + mx + 13 - 2m = 0$$
$$x^2 + (4 + m)x + 13 - 2m = 0$$
Susun semula persamaan dalam bentuk am

$a = 1$, $b = 4 + m$ dan $c = 13 - 2m$
$$b^2 - 4ac < 0$$
Tidak mempunyai punca nyata
$$(4 + m)^2 - 4(1)(13 - 2m) < 0$$
$$16 + 8m + m^2 - 52 + 8m < 0$$
$$m^2 + 16m - 36 < 0$$
$$(m + 18)(m - 2) < 0$$



Maka, julat nilai m ialah $-18 < m < 2$.

Contoh 8

Diberi persamaan $x^2 - 4ax + 5b = 0$ mempunyai dua punca nyata yang sama, ungkapkan a dalam sebutan b.

Penyelesaian

$x^2 - 4ax + 5b = 0$ dengan $a = 1$, $b = -4a$ dan $c = 5b$.

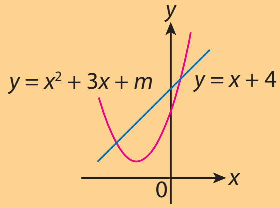
Oleh sebab persamaan mempunyai dua punca nyata yang sama,
$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(-4a)^2 - 4(1)(5b) = 0$$
$$16a^2 - 20b = 0$$
$$16a^2 = 20b$$
$$a^2 = \frac{5}{4}b$$
$$a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5b}$$

SUMBANG SARAN

Dengan menganggap $b^2 - 4ac \geqslant 0$, tunjukkan bahawa penyelesaian bagi persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah salingan bagi penyelesaian persamaan $cx^2 + bx + a = 0$.

POKET MATEMATIK

Pertimbangkan garis $y = x + 4$ yang menyilang lengkung $y = x^2 + 3x + m$ seperti dalam rajah di bawah.



Untuk mencari julat nilai m, selesaikan dua persamaan itu secara serentak.
$$x^2 + 3x + m = x + 4$$
$$x^2 + 2x + m - 4 = 0$$
Persamaan kuadratik ini mempunyai dua punca nyata dan berbeza. Jadi,
$$b^2 - 4ac > 0$$
$$2^2 - 4(1)(m - 4) > 0$$
$$4 - 4m + 16 > 0$$
$$4m < 20$$
$$m < 5$$
Maka, julat nilai m ialah $m < 5$.

Lakukan perbincangan bersama rakan anda dan cari nilai-nilai m atau julat nilai m untuk kes-kes berikut:
- Garis $y = mx - 5$ menyentuh satu titik pada lengkung $2y = x^2 - 1$.
- Garis $y = mx + 4$ menyilang lengkung $5x^2 - xy = 2$ pada dua titik.
- Garis $y = 2x + 3$ tidak menyilang lengkung $x^2 + xy = m$.

Latih Diri 2.5

1. Cari nilai-nilai atau julat nilai p dengan keadaan persamaan
   (a) $9x^2 + p + 1 = 4px$ mempunyai dua punca yang sama,
   (b) $x^2 + (2x + 3)x = p$ mempunyai dua punca nyata dan berbeza,
   (c) $x^2 + 2px + (p - 1)(p - 3) = 0$ tidak mempunyai punca nyata.
2. Cari julat nilai k jika persamaan $x^2 + k = kx - 3$ mempunyai dua punca nyata dan berbeza. Nyatakan nilai-nilai k jika persamaan itu mempunyai dua punca nyata yang sama.
3. Persamaan kuadratik $x^2 + hx + k = 0$ mempunyai punca-punca -2 dan 6, cari
   (a) nilai h dan nilai k,
   (b) julat nilai c dengan keadaan persamaan $x^2 + hx + k = c$ tidak mempunyai punca nyata.
4. Persamaan $hx^2 + 3hx + h + k = 0$, dengan $h \neq 0$, mempunyai dua punca nyata yang sama. Ungkapkan k dalam sebutan h.
5. Diberi bahawa persamaan kuadratik $ax^2 - 5bx + 4a = 0$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar mempunyai dua punca nyata yang sama, cari nisbah $a : b$.

Latihan Intensif 2.2

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2Z8bFQG untuk kuiz

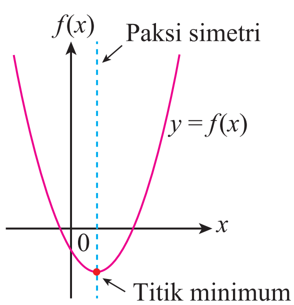
1. Tentukan jenis punca bagi persamaan kuadratik berikut.
   (a) $x^2 - 8x + 16 = 0$ (b) $(x - 2)^2 = 3$ (c) $2x^2 + x + 4 = 0$
2. Persamaan kuadratik berikut mempunyai dua punca nyata yang sama. Cari nilai-nilai k.
   (a) $x^2 + kx = 2x - 9$ (b) $kx^2 + (2k + 1)x + k - 1 = 0$
3. Persamaan kuadratik berikut mempunyai dua punca nyata dan berbeza. Cari julat nilai r.
   (a) $x(x + 1) = rx - 4$ (b) $x^2 + x = 2rx - r^2$
4. Cari julat nilai p jika persamaan berikut tidak mempunyai punca nyata.
   (a) $(1 - p)x^2 + 5 = 2x$ (b) $4px^2 + (4p + 1)x + p - 1 = 0$
5. Persamaan kuadratik $kx^2 - 10x + 6k = 5$ dengan k ialah pemalar, mempunyai dua punca nyata yang sama.
   (a) Cari nilai-nilai k.
   (b) Seterusnya, cari punca bagi persamaan tersebut dengan menggunakan nilai terkecil k yang diperoleh di (a).
6. Persamaan kuadratik $x(x - 4) + 2n = m$ dengan m dan n ialah pemalar, mempunyai dua punca nyata yang sama. Ungkapkan m dalam sebutan n.
7. Persamaan kuadratik $x^2 + bx + c = 0$ dengan b dan c ialah integer positif, mempunyai pembezalayan 16 dan $b - c = -4$. Cari
   (a) nilai-nilai yang mungkin bagi b dan c,
   (b) punca-punca yang sepadan bagi persamaan tersebut.
8. Persamaan kuadratik $2x^2 - 5x + c = 0$ dengan c ialah integer positif, tidak mempunyai punca nyata.
   (a) Cari dua nilai yang mungkin, c_1 dan c_2 bagi c.
   (b) Berdasarkan nilai c_1 dan c_2 di (a), adakah persamaan $2x^2 - 5x + \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = 0$ mempunyai dua punca nyata? Terangkan.

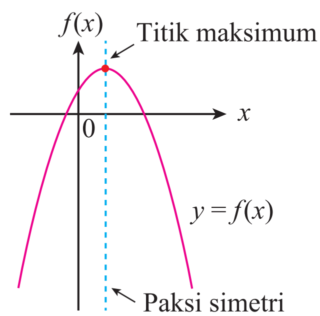
2.3 Fungsi Kuadratik

Sebiji bola dilontarkan ke dalam jaring. Apakah yang dapat anda perhatikan tentang laluan bola itu? Jika anda perhatikan laluan bola itu, didapati laluannya mengikut bentuk parabola. Laluan atau lengkung seperti itu merupakan bentuk graf bagi suatu fungsi kuadratik. Apakah contoh-contoh lain yang melibatkan bentuk parabola?

Menganalisis kesan perubahan *a, b* dan *c* terhadap bentuk dan kedudukan graf $f(x) = ax^2 + bx + c$

Bentuk am suatu fungsi kuadratik ialah suatu fungsi dalam bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan keadaan a, b dan c ialah pemalar dan $a \neq 0$. Bentuk graf suatu fungsi kuadratik ialah parabola yang bersimetri pada paksi yang melalui titik minimum atau titik maksimum.





POKET MATEMATIK

Kuasa tertinggi pemboleh ubah bagi fungsi kuadratik adalah sama dengan persamaan kuadratik, iaitu 2.

Apakah yang akan berlaku kepada bentuk dan kedudukan graf fungsi kuadratik sekiranya nilai a, b dan c berubah? Mari kita teroka.

INKUIRI 4 **Berkumpulan** **PAK-21**

Tujuan: Meneroka kesan perubahan nilai a, b dan c terhadap bentuk dan kedudukan graf fungsi kuadratik

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Perhatikan graf fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan $a = 1$, $b = 2$ dan $c = 3$.
3. Bersama-sama ahli kumpulan, buat analisis tentang perubahan pada bentuk dan kedudukan graf fungsi berdasarkan arahan berikut:
   (a) Seret gelongsor a ke kiri dan ke kanan tanpa mengubah gelongsor b dan gelongsor c.
   (b) Seret gelongsor b ke kiri dan ke kanan tanpa mengubah gelongsor a dan gelongsor c.
   (c) Seret gelongsor c ke kiri dan ke kanan tanpa mengubah gelongsor a dan gelongsor b.
4. Buat satu generalisasi tentang kesan perubahan nilai a, b dan c terhadap bentuk dan kedudukan graf $f(x) = ax^2 + bx + c$.
5. Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas dan lakukan perbincangan bersama dengan kumpulan yang lain.

ggbm.at/vagdtjdp

Daripada Inkuiri 4, hasil dapatan berikut diperoleh.

	Perubahan bentuk dan kedudukan graf fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$
Hanya nilai *a* berubah	• Perubahan nilai a memberi kesan kepada bentuk dan kelebaran graf namun pintasan-y tetap sama. • Apabila $a > 0$, graf berbentuk $\cup$ yang melalui titik minimum dan apabila $a < 0$, graf berbentuk $\cap$ yang melalui titik maksimum. • Untuk graf $a > 0$, misalnya $a = 1$, apabila nilai a semakin besar daripada 1, kelebaran graf semakin berkurang. Sebaliknya apabila nilai a semakin kecil daripada 1 menghampiri 0, kelebaran graf semakin bertambah. • Untuk graf $a < 0$, misalnya $a = -1$, apabila nilai a semakin kecil daripada -1, kelebaran graf semakin berkurang. Sebaliknya apabila nilai a semakin besar daripada -1 menghampiri 0, kelebaran graf semakin bertambah.
Hanya nilai *b* berubah	• Perubahan nilai b hanya memberi kesan kepada kedudukan verteks terhadap paksi-y namun bentuk graf dan pintasan-y tidak berubah. • Apabila $b = 0$, verteks berada pada paksi-y. • Untuk graf $a > 0$, apabila $b > 0$, verteks berada di sebelah kiri paksi-y dan apabila $b < 0$, verteks berada di sebelah kanan paksi-y. • Untuk graf $a < 0$, apabila $b > 0$, verteks berada di sebelah kanan paksi-y dan apabila $b < 0$, verteks berada di sebelah kiri paksi-y.
Hanya nilai *c* berubah	• Perubahan nilai c hanya memberi kesan kepada kedudukan graf secara menegak sama ada ke atas atau ke bawah. • Bentuk graf tidak berubah.

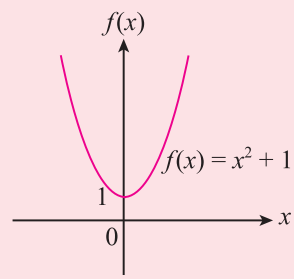
Contoh 9

Rajah menunjukkan lakaran graf bagi $f(x) = x^2 + 1$ dengan $a = 1$, $b = 0$ dan $c = 1$. Buat analisis dan lakukan generalisasi pada bentuk dan kedudukan graf itu apabila nilai-nilai berikut berubah. Seterusnya, lakarkan graf.

(a) Nilai a menjadi

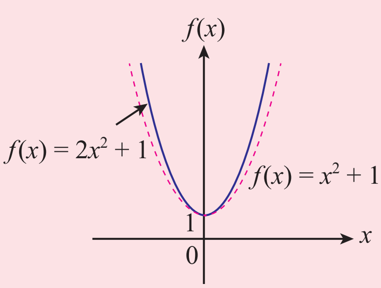
(i) 2, (ii) $\frac{1}{2}$.

(b) Nilai c menjadi 3.

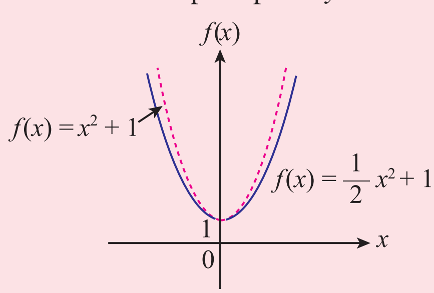


Penyelesaian

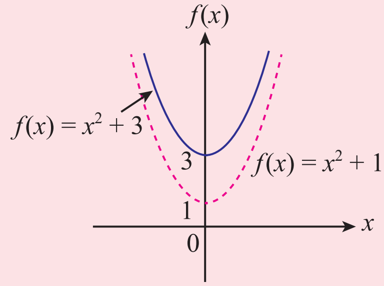
(a) (i) Apabila a berubah daripada 1 ke 2, kelebaran graf semakin berkurang. Pintasan-y tidak berubah dan verteks berada pada paksi-y.



(ii) Apabila a berubah daripada 1 ke $\frac{1}{2}$, kelebaran graf semakin bertambah. Pintasan-y tidak berubah dan verteks berada pada paksi-y.

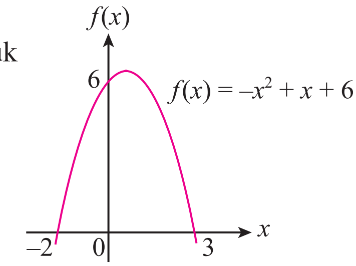


(b) Apabila c berubah daripada 1 ke 3, bentuk graf tidak berubah. Hanya kedudukannya yang berubah, iaitu graf bergerak 2 unit ke atas.



Latih Diri 2.6

1. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $f(x) = -x^2 + x + 6$, dengan $a = -1$, $b = 1$ dan $c = 6$. Lakarkan graf $f(x)$ yang terbentuk apabila nilai berikut berubah.
   (a) Nilai a berubah kepada
   (i) -3 (ii) $-\frac{1}{4}$,
   (b) nilai b berubah kepada -1,
   (c) nilai c berubah kepada -2.
   Buat generalisasi daripada perubahan bentuk dan kedudukan graf yang diperoleh.



Menghubungkaitkan kedudukan graf fungsi kuadratik dengan jenis punca

Anda telah mengetahui bahawa pembezalayan $b^2 - 4ac$ bagi suatu persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ boleh menentukan jenis punca. Mari kita lihat pula jenis punca persamaan kuadratik yang dapat menentukan kedudukan graf suatu fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$ terhadap paksi-x.

INKUIRI 5 Berkumpulan

Tujuan: Meneroka hubungan antara kedudukan graf fungsi kuadratik dengan jenis punca
Arahan:
1. Setiap kumpulan perlu memilih satu kes sahaja daripada dua kes yang berikut.

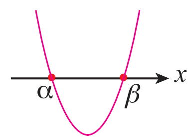
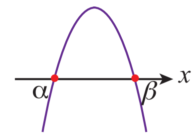
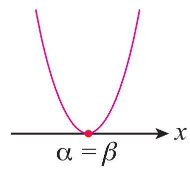
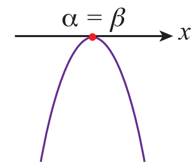
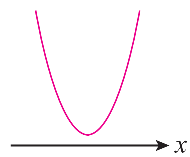
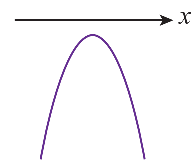
Kes 1
(a) $f(x) = x^2 + 4x + 4$
(b) $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$
(c) $f(x) = x^2 - 6x + 12$

Kes 2
(a) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
(b) $f(x) = -2x^2 - 8x - 5$
(c) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$

2. Dengan menggunakan perisian geometri dinamik, bina graf setiap fungsi kuadratik bagi kes yang dipilih.
3. Perhatikan bentuk graf yang diperoleh serta punca-punca yang terhasil.
4. Nyatakan perkaitan antara nilai $b^2 - 4ac$, jenis punca dan bilangan titik persilangan pada paksi-x.
5. Daripada perkaitan tersebut, nyatakan kedudukan graf fungsi kuadratik yang diperoleh.
6. Bandingkan hasil dapatan kumpulan anda dengan kumpulan yang berlainan kes dan buat kesimpulan menyeluruh tentang perbandingan yang dilakukan.

2.3.1 2.3.2

Hasil daripada Inkuiri 5, hubungan antara kedudukan graf fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$ pada paksi-x dan jenis puncanya dapat dirumuskan seperti dalam jadual di bawah.

Pembezalayan, $b^2 - 4ac$	**Jenis punca dan kedudukan graf**	**Kedudukan graf fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$**	
		$a > 0$	**$a < 0$**
$b^2 - 4ac > 0$	• Dua punca nyata dan berbeza • Graf menyilang paksi-x pada dua titik yang berbeza.		
$b^2 - 4ac = 0$	• Dua punca nyata yang sama • Graf menyentuh paksi-x pada satu titik sahaja.		
$b^2 - 4ac < 0$	• Tiada punca nyata • Graf tidak menyilang pada mana-mana titik pada paksi-x.		

Contoh 10

Tentukan jenis punca bagi setiap fungsi kuadratik berikut apabila $f(x) = 0$. Kemudian, lakarkan graf dan buat satu generalisasi tentang kedudukan graf itu pada paksi-x.

(a) $f(x) = 2x^2 + x - 5$ (b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

Penyelesaian

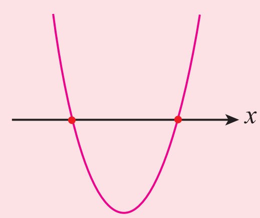
(a) $f(x) = 2x^2 + x - 5$

$a = 2, b = 1, c = -5$

$b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-5)$

$= 41\ (> 0)$

Fungsi kuadratik mempunyai dua punca nyata dan berbeza. Oleh sebab $a > 0$, maka graf $f(x)$ ialah satu parabola yang melalui titik minimum dan menyilang paksi-x pada dua titik.



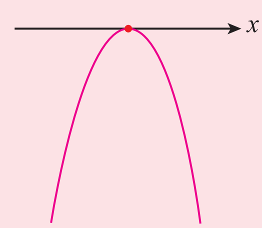
(b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

$a = -1, b = 2, c = -1$

$b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-1)$

$= 0$

Fungsi kuadratik mempunyai dua punca nyata yang sama. Oleh sebab $a < 0$, maka graf $f(x)$ ialah satu parabola yang melalui titik maksimum dan menyentuh paksi-x pada satu titik.



Contoh 11

(a) Cari nilai-nilai m, dengan keadaan paksi-x ialah tangen kepada graf fungsi kuadratik $f(x) = (m + 1)x^2 + 4(m - 2)x + 2m$.
(b) Cari julat nilai k jika graf fungsi kuadratik $f(x) = 2x^2 + 5x + 3 - k$ tiada pintasan-x.
(c) Cari julat nilai p jika graf fungsi kuadratik $f(x) = x^2 + px + p + 3$ mempunyai dua pintasan-x.

Penyelesaian

(a) Graf fungsi kuadratik $f(x) = (m + 1)x^2 + 4(m - 2)x + 2m$ dengan keadaan paksi-x ialah tangen bermaksud fungsi tersebut mempunyai dua punca nyata yang sama.
Untuk dua punca nyata yang sama:

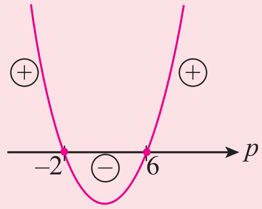
$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ (4m - 8)^2 - 4(m + 1)(2m) &= 0 \\ 16m^2 - 64m + 64 - 8m^2 - 8m &= 0 \\ 8m^2 - 72m + 64 &= 0 \\ m^2 - 9m + 8 &= 0 \\ (m - 1)(m - 8) &= 0 \\ m &= 1 \text{ atau } m = 8 \end{aligned}$$

(b) Graf fungsi kuadratik $f(x) = 2x^2 + 5x + 3 - k$ tiada pintasan-x bermaksud fungsi tersebut tidak mempunyai punca nyata.
Untuk tiada punca nyata:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &< 0 \\ 5^2 - 4(2)(3 - k) &< 0 \\ 25 - 24 + 8k &< 0 \\ 1 + 8k &< 0 \\ 8k &< -1 \\ k &< -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

(c) Graf fungsi kuadratik $f(x) = x^2 + px + p + 3$ mempunyai dua pintasan-x bermaksud fungsi tersebut mempunyai dua punca nyata yang berbeza.
Untuk dua punca nyata yang berbeza:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &> 0 \\ p^2 - 4(1)(p + 3) &> 0 \\ p^2 - 4p - 12 &> 0 \\ (p + 2)(p - 6) &> 0 \\ p < -2 \quad &\text{atau} \quad p > 6 \end{aligned}$$



SUMBANG SARAN

Apakah syarat untuk suatu fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$ menjadi sentiasa positif atau sentiasa negatif untuk semua nilai nyata x? Bincangkan.

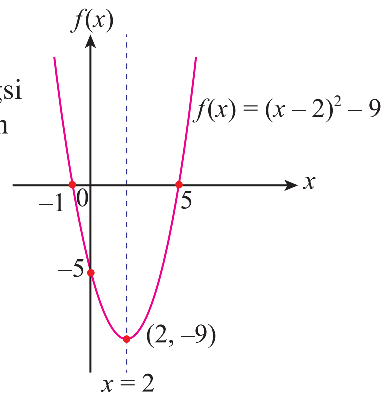
2.3.2

Latih Diri 2.7

1. Tentukan jenis punca bagi setiap fungsi kuadratik berikut. Lakarkan graf dan buat generalisasi tentang kedudukan graf pada paksi-x.
   (a) $f(x) = -3x^2 + 6x - 3$ (b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ (c) $f(x) = 4x^2 - 8x + 5$
2. Cari nilai-nilai h yang mungkin jika graf bagi fungsi kuadratik berikut menyentuh paksi-x pada satu titik sahaja.
   (a) $f(x) = x^2 - 2hx + 2 + h$ (b) $f(x) = x^2 - (h + 3)x + 3h + 1$
3. Cari julat nilai q jika graf bagi fungsi kuadratik berikut menyilang paksi-x pada dua titik.
   (a) $f(x) = 5x^2 - (qx + 4)x - 2$ (b) $f(x) = (q + 2)x^2 + q(1 - 2x) - 5$
4. Cari julat nilai r jika graf bagi fungsi kuadratik berikut tidak menyilang paksi-x.
   (a) $f(x) = rx^2 + 4x - 6$ (b) $f(x) = rx^2 + (2r + 4)x + r + 7$

Membuat perkaitan antara bentuk verteks fungsi kuadratik, $f(x) = a(x - h)^2 + k$ dengan bentuk fungsi kuadratik yang lain

Rajah di sebelah menunjukkan lakaran graf bagi fungsi kuadratik dalam bentuk verteks, $f(x) = (x - 2)^2 - 9$. Oleh sebab $a > 0$, graf bagi fungsi kuadratik berbentuk $\cup$. Perhatikan bahawa graf fungsi kuadratik ini mempunyai verteks pada titik minimum $(2, -9)$ dan persamaan paksi simetri, $x = 2$.



Bentuk verteks ialah suatu fungsi kuadratik dalam bentuk $f(x) = a(x - h)^2 + k$, dengan keadaan a, h dan k ialah pemalar. Verteksnya ialah (h, k) dan bersimetri pada garis $x = h$.

Apabila $a > 0$, verteks (h, k) ialah titik minimum dan k ialah nilai minimum bagi $f(x)$. Apabila $a < 0$, verteks (h, k) ialah titik maksimum dan k ialah nilai maksimum bagi $f(x)$.

Selain bentuk verteks, fungsi kuadratik boleh ditulis dalam bentuk seperti berikut:

Bentuk fungsi kuadratik

- **Bentuk am**, $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan keadaan a, b dan c ialah pemalar yang mempunyai verteks pada titik $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ dan bersimetri pada garis $x = -\frac{b}{2a}$.

- **Bentuk pintasan**, $f(x) = a(x - p)(x - q)$, dengan keadaan a, p dan q ialah pemalar. p dan q ialah punca-punca atau pintasan-x bagi $f(x)$, verteksnya pada titik $\left(\frac{p + q}{2}, f\left(\frac{p + q}{2}\right)\right)$ dan bersimetri pada garis $x = \frac{p + q}{2}$.

Apakah perkaitan yang wujud antara bentuk verteks fungsi kuadratik dengan bentuk am dan bentuk pintasan? Mari kita teroka.

INKUIRI 6 **Berkumpulan**

Tujuan: Meneroka perkaitan antara bentuk verteks suatu fungsi kuadratik dengan bentuk am dan bentuk pintasan

Arahan:

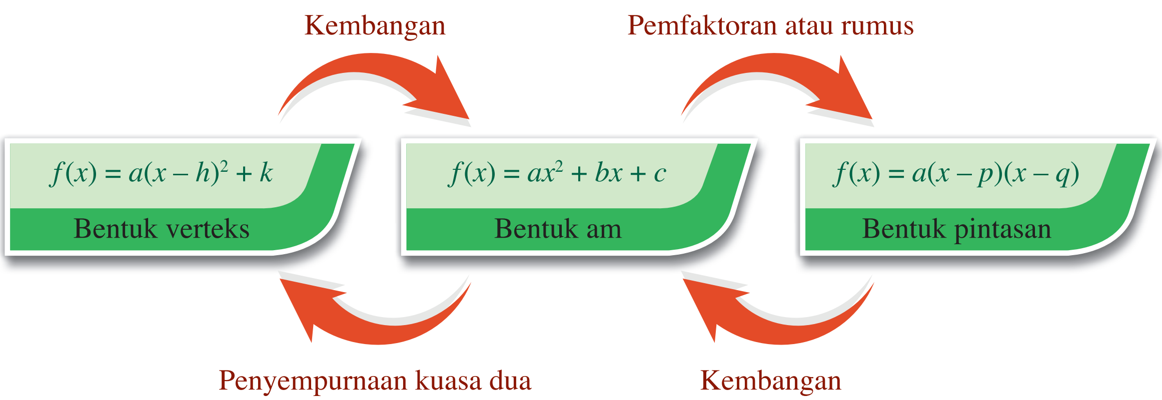
1. Pertimbangkan fungsi kuadratik dalam bentuk verteks, $f(x) = (x - 4)^2 - 4$.
2. Dalam kumpulan masing-masing, bincang dan ungkapkan fungsi kuadratik dalam bentuk verteks itu kepada bentuk am dan bentuk pintasan.
3. Kemudian, salin dan lengkapkan jadual di bawah.

Bentuk fungsi kuadratik	Fungsi kuadratik	Pintasan-x	Pintasan-y	Verteks	Garis simetri
Bentuk verteks	$f(x) = (x - 4)^2 - 4$				
Bentuk am					
Bentuk pintasan					

4. Lakarkan graf bagi setiap bentuk fungsi kuadratik itu. Semak lakaran graf anda dengan menggunakan perisian geometri dinamik.
5. Bandingkan graf yang dibina bagi fungsi kuadratik dalam bentuk verteks, bentuk am dan bentuk pintasan.
6. Lakukan sumbang saran dalam kumpulan dan dapatkan satu kesimpulan tentang perkaitan yang wujud antara fungsi kuadratik dalam bentuk verteks dengan bentuk am dan bentuk pintasan.

Hasil daripada Inkuiri 6, didapati bahawa fungsi kuadratik $f(x) = (x - 4)^2 - 4$ dalam bentuk verteks, bentuk am dan bentuk pintasan menghasilkan graf yang sama apabila dilakar.

Untuk mengungkapkan fungsi kuadratik dalam bentuk verteks kepada bentuk am dan bentuk pintasan atau sebaliknya, kaedah berikut boleh digunakan:



Contoh 12

Ungkapkan fungsi kuadratik, $f(x) = 2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ dalam bentuk pintasan, $f(x) = a(x - p)(x - q)$, dengan keadaan a, p dan q ialah pemalar dan $p < q$. Seterusnya, nyatakan nilai-nilai a, p dan q.

Penyelesaian

Tukarkan bentuk verteks fungsi kuadratik kepada bentuk am terlebih dahulu sebelum melakukan pemfaktoran.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \\ &= 2\left(x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{81}{16}\right) - \frac{1}{8} \\ &= 2x^2 + 9x + 10 \longleftarrow \text{Bentuk am} \\ &= (2x + 5)(x + 2) \\ &= 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x + 2) \longleftarrow \text{Bentuk pintasan} \end{aligned}$$

Oleh itu, fungsi kuadratik dalam bentuk pintasan bagi $f(x) = 2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ boleh diungkapkan sebagai $f(x) = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x + 2)$, dengan $a = 2$, $p = -\frac{5}{2}$ dan $q = -2$.

Cabar Minda

Bukan semua bentuk verteks atau bentuk am boleh diungkapkan dalam bentuk pintasan, hanya graf yang mempunyai pintasan-x sahaja yang boleh diungkapkan. Adakah anda setuju dengan pernyataan tersebut? Terangkan.

Kaedah Alternatif

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \\ &= 2\left[\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{1}{4^2}\right] \end{aligned}$$

Guna $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(x + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= 2\left(x + \frac{10}{4}\right)\left(x + \frac{8}{4}\right) \\ &= 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x + 2) \end{aligned}$$

Contoh 13

Ungkapkan $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ sebagai $f(x) = a(x - h)^2 + k$ dengan keadaan a, h dan k ialah pemalar. Seterusnya, tentukan nilai-nilai a, h dan k.

Penyelesaian

$f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

Pastikan pekali bagi x^2 ialah 1 sebelum melengkapkan kuasa dua sempurna.

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2 + 2x + 1 \\ &= -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) \longleftarrow \text{Faktorkan } -3 \text{ daripada } -3x^2 + 2x + 1 \\ &= -3\left[x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right] \longleftarrow \text{Tambah dan tolak } \left(\frac{\text{pekali } x}{2}\right)^2 \\ &= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right] \\ &= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right] \\ &= -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Maka, $a = -3$, $h = \frac{1}{3}$ dan $k = \frac{4}{3}$.

SUMBANG SARAN

Dengan menggunakan kaedah penyempurnaan kuasa dua, tunjukkan bahawa persamaan paksi simetri bagi $f(x) = ax^2 + bx + c$ ialah $x = -\frac{b}{2a}$.

2.3.3

Latih Diri 2.8

1. Diberi $f(x) = 2(x - 3)^2 - 8 = a(x - p)(x - q)$ untuk semua nilai x, cari nilai pemalar a, p dan q dengan $p < q$.

2. Ungkapkan setiap bentuk verteks berikut kepada bentuk am dan bentuk pintasan.

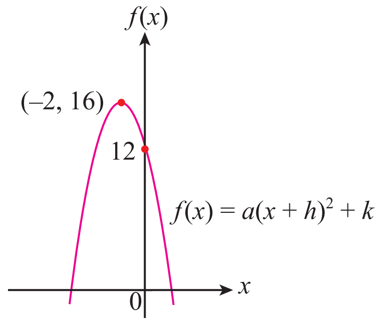
(a) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ (b) $f(x) = 9 - (2x - 1)^2$ (c) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 18$

3. Cari verteks bagi fungsi $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 4)^2 - 5$ dan tukarkannya kepada bentuk am.

4. Rajah di sebelah menunjukkan graf fungsi kuadratik $f(x) = a(x + h)^2 + k$, dengan keadaan a, h dan k ialah pemalar. Diberi $(-2, 16)$ ialah titik maksimum graf itu.

(a) Nyatakan nilai-nilai a, h dan k.

(b) Seterusnya, ungkapkan fungsi itu dalam bentuk am, $f(x) = ax^2 + bx + c$ dan bentuk pintasan, $f(x) = a(x - p)(x - q)$.



5. Ungkapkan setiap yang berikut dalam bentuk verteks, $f(x) = a(x - h)^2 + k$, dengan keadaan a, h dan k ialah pemalar.

(a) $f(x) = x^2 - x - 6$ (b) $f(x) = -x^2 - 2x + 4$ (c) $f(x) = -2x^2 - x + 6$

(d) $f(x) = 3x^2 - 2x - 9$ (e) $f(x) = (x + 2)(6 - x)$ (f) $f(x) = 2(x + 4)(x - 2)$

Menganalisis kesan perubahan a, h dan k terhadap bentuk dan kedudukan graf $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Fungsi kuadratik dalam bentuk verteks, $f(x) = a(x - h)^2 + k$ dengan a, h dan k ialah pemalar mempunyai verteks pada (h, k) dan bersimetri pada garis $x = h$. Apakah yang akan berlaku kepada bentuk dan kedudukan graf fungsi $f(x)$ apabila nilai a, h dan k berubah?

INKUIRI 7 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Meneroka kesan perubahan a, h dan k terhadap bentuk dan kedudukan graf $f(x) = a(x - h)^2 + k$

ggbm.at/ubtwphte

Arahan:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.

2. Perhatikan graf fungsi $f(x) = a(x - h)^2 + k$ dengan keadaan $a = 2$, $h = 3$ dan $k = 1$.

3. Bersama-sama ahli kumpulan, buat analisis dan nyatakan pemerhatian pada bentuk dan kedudukan graf fungsi berdasarkan setiap arahan berikut:

(a) Seret gelongsor a ke kiri dan ke kanan tanpa mengubah gelongsor h dan gelongsor k.

(b) Seret gelongsor h ke kiri dan ke kanan tanpa mengubah gelongsor a dan gelongsor k.

(c) Seret gelongsor k ke kiri dan ke kanan tanpa mengubah gelongsor a dan gelongsor h.

4. Apakah yang berlaku pada paksi simetri, nilai minimum atau nilai maksimum graf fungsi itu apabila nilai a, nilai h atau nilai k berubah?

5. Buat satu generalisasi tentang kesan perubahan a, h dan k terhadap bentuk dan kedudukan graf $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

2.3.3 2.3.4

Hasil daripada Inkuiri 7, didapati bahawa:

	Perubahan bentuk dan kedudukan graf fungsi $f(x) = a(x - h)^2 + k$
Hanya nilai *a* berubah	• Perubahan nilai a memberi kesan kepada bentuk dan kelebaran graf. • Apabila $a > 0$, graf berbentuk $\cup$ yang melalui titik minimum dan apabila $a < 0$, graf berbentuk $\cap$ yang melalui titik maksimum. • Untuk graf $a > 0$, misalnya $a = 2$, apabila nilai a semakin besar daripada 2, kelebaran graf semakin berkurang. Sebaliknya apabila nilai a semakin kecil daripada 2 menghampiri 0, kelebaran graf semakin bertambah. • Untuk graf $a < 0$, misalnya $a = -2$, apabila nilai a semakin kecil daripada -2, kelebaran graf semakin berkurang. Sebaliknya apabila nilai a semakin besar daripada -2 menghampiri 0, kelebaran graf semakin bertambah. • Paksi simetri dan nilai minimum atau maksimum tidak berubah.
Hanya nilai *h* berubah	• Perubahan nilai h hanya menunjukkan pergerakan mengufuk graf. • Apabila nilai h bertambah, graf akan bergerak ke kanan manakala apabila nilai h berkurang, graf akan bergerak ke kiri. • Kedudukan paksi simetri berubah tetapi nilai minimum atau nilai maksimum tidak berubah.
Hanya nilai *k* berubah	• Perubahan nilai k hanya menunjukkan pergerakan menegak graf. • Apabila nilai k bertambah, graf akan bergerak ke atas manakala apabila nilai k berkurang, graf akan bergerak ke bawah. • Nilai minimum atau maksimum berubah tetapi paksi simetri tidak berubah.

Contoh 14

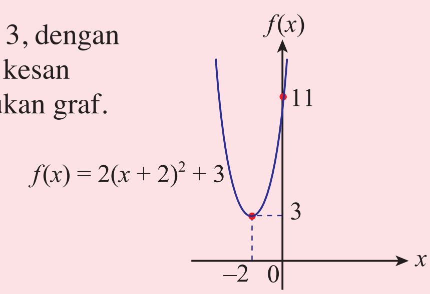
Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $f(x) = 2(x + 2)^2 + 3$, dengan keadaan $a = 2$, $h = -2$ dan $k = 3$. Buat generalisasi tentang kesan perubahan setiap nilai berikut terhadap bentuk dan kedudukan graf.

(a) Nilai a berubah kepada

(i) 6, (ii) $\frac{1}{2}$.

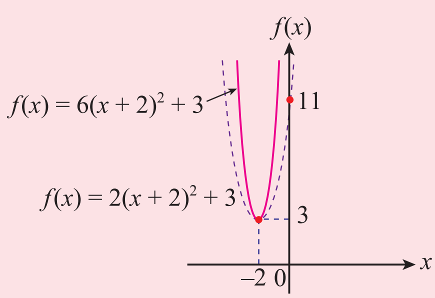
(b) Nilai h berubah kepada -6.

(c) Nilai k berubah kepada 8.

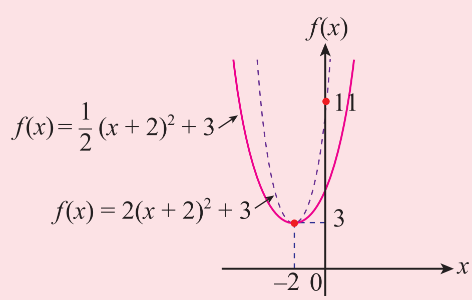


Penyelesaian

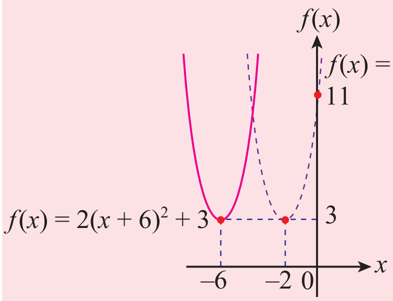
(a) (i) Apabila a berubah dari 2 ke 6, kelebaran graf berkurang. Paksi simetri dan nilai minimum graf tidak berubah.



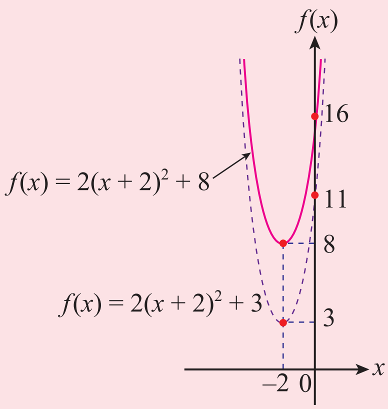
(ii) Apabila a berubah dari 2 ke $\frac{1}{2}$, kelebaran graf bertambah. Paksi simetri dan nilai minimum graf tidak berubah.



(b) Apabila h berubah dari –2 ke –6, graf dengan bentuk yang sama bergerak secara mengufuk 4 unit ke kiri. Persamaan paksi simetrinya menjadi $x = –6$ dan nilai minimumnya tidak berubah, iaitu 3.

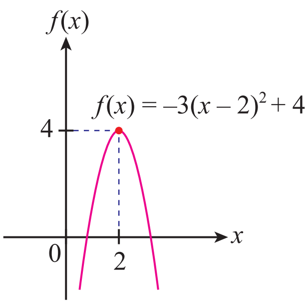


(c) Apabila k berubah dari 3 ke 8, graf dengan bentuk yang sama bergerak secara menegak 5 unit ke atas. Nilai minimumnya menjadi 8 dan persamaan paksi simetrinya masih sama, iaitu $x = –2$.

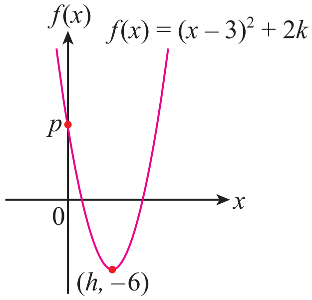


Latih Diri 2.9

1. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $f(x) = –3(x – 2)^2 + 4$ dengan $a = –3$, $h = 2$ dan $k = 4$.
   (a) Tentukan koordinat bagi titik maksimum dan persamaan paksi simetri.
   (b) Buat generalisasi terhadap bentuk dan kedudukan graf apabila nilai-nilai berikut berubah. Seterusnya, lakarkan graf.
      (i) Nilai a berubah kepada –10.
      (ii) Nilai h berubah kepada 5.
      (iii) Nilai k berubah kepada –2.



2. Rajah di sebelah menunjukkan graf fungsi $f(x) = (x – 3)^2 + 2k$, dengan keadaan k ialah pemalar. Diberi $(h, –6)$ ialah titik minimum graf itu.
   (a) Nyatakan nilai-nilai h, k dan p.
   (b) Jika graf itu bergerak 2 unit ke kanan, tentukan persamaan paksi simetri bagi lengkung itu.
   (c) Jika graf itu bergerak 5 unit ke atas, tentukan nilai minimumnya.



3. Bandingkan graf bagi setiap fungsi kuadratik berikut kepada graf $f(x) = x^2$ dengan koordinat verteks ialah (0, 0).

(a) $f(x) = \frac{1}{2}(x – 6)^2$ (b) $f(x) = 3(x – 1)^2 + 5$ (c) $f(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2 – 4$

Melakar graf fungsi kuadratik

Graf fungsi kuadratik dalam pelbagai bentuk boleh dilakar mengikut langkah-langkah berikut:

Kenal pasti nilai a untuk menentukan bentuk graf fungsi kuadratik.

Cari nilai pembezalayan, $b^2 - 4ac$ untuk menentukan kedudukan graf.

Tentukan verteks.

Tentukan titik persilangan pada paksi-x dengan menyelesaikan persamaan fungsi kuadratik $f(x) = 0$.

Cari nilai $f(0)$ untuk menentukan pintasan-y.

Plotkan titik-titik yang diperoleh pada satah Cartes dan lukis satu parabola licin bersimetri pada garis mencancang yang melalui verteks graf.

Contoh 15

Lakarkan graf bagi fungsi kuadratik $f(x) = -x^2 + 4x + 12$.

Penyelesaian

$a < 0$, maka $f(x)$ mempunyai titik maksimum.

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 4^2 - 4(-1)(12) \\ &= 16 + 48 \\ &= 64\ (> 0) \end{aligned}$$

Lengkung menyilang paksi-x pada dua titik yang berbeza.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 12 \\ &= -(x^2 - 4x - 12) \\ &= -\left[x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 12\right] \\ &= -(x - 2)^2 + 16 \end{aligned}$$

Titik maksimum ialah (2, 16) dan persamaan paksi simetri, $x = 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x^2 + 4x + 12 &= 0 \\ (-x + 6)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$-x + 6 = 0 \quad \text{atau} \quad x + 2 = 0$$
$$x = 6 \qquad\qquad x = -2$$

Persilangan pada paksi-x ialah di $x = -2$ dan $x = 6$.

$$\begin{aligned} f(0) &= -(0)^2 + 4(0) + 12 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Graf menyilang paksi-y pada (0, 12).

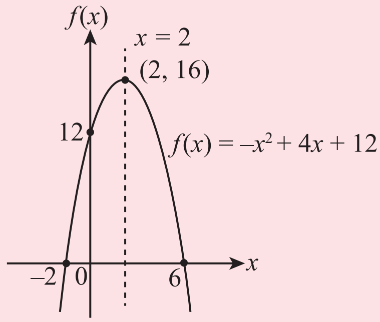
SUMBANG SARAN

Bagaimanakah cara untuk melakar graf fungsi kuadratik dalam Contoh 15 bagi domain $-3 \leqslant x \leqslant 7$?

SUMBANG SARAN

Tanpa mengungkapkan kepada bentuk verteks, bagaimanakah cara mencari verteks bagi fungsi kuadratik dalam bentuk am, $f(x) = ax^2 + bx + c$ dan bentuk pintasan, $f(x) = a(x - p)(x - q)$? Bincangkan.

Lengkung dilakar seperti rajah di sebelah.



Latih Diri 2.10

1. Lakarkan graf bagi setiap fungsi kuadratik yang berikut.

(a) $f(x) = (x - 1)^2 - 4$
(b) $f(x) = 2(x + 2)^2 - 2$
(c) $f(x) = 9 - (x - 2)^2$
(d) $f(x) = -2(x - 1)(x - 3)$
(e) $f(x) = -(x + 3)(x + 5)$
(f) $f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$
(g) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$
(h) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$
(i) $f(x) = -x^2 + 4x + 12$

Menyelesaikan masalah fungsi kuadratik

Pengetahuan tentang fungsi kuadratik adalah amat penting dan banyak digunakan dalam kehidupan seharian. Graf fungsi kuadratik yang berbentuk parabola boleh membantu kita menyelesaikan banyak masalah misalnya, untuk meramal untung dan rugi dalam perniagaan, memplot gerakan melengkung suatu objek dan menentukan nilai minimum atau nilai maksimum.

Contoh 16

APLIKASI MATEMATIK

Suresh dipilih untuk mewakili sekolah dalam pertandingan merejam lembing peringkat daerah. Suresh merejam batang lembing pada jarak 3 meter daripada permukaan tanah. Tinggi lembing yang direjam diberi oleh fungsi $h(t) = -5t^2 + 14t + 3$, dengan keadaan h ialah ketinggian lembing, dalam meter, dan t ialah masa, dalam saat.

(a) Cari tinggi maksimum, dalam meter, lembing yang direjam oleh Suresh.
(b) Hitung masa, dalam saat, apabila lembing itu menyentuh permukaan tanah.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

Fungsi bagi tinggi rejaman lembing ialah $h(t) = -5t^2 + 14t + 3$, dengan h ialah ketinggian lembing, dalam meter, dan t ialah masa selepas lembing direjam, dalam saat.

2. Merancang strategi

- Ungkapkan fungsi kuadratik dalam bentuk verteks dan tentukan nilai maksimum.
- Selesaikan persamaan $h(t) = 0$ untuk mencari pintasan pada paksi-t, iaitu masa untuk lembing menyentuh permukaan tanah.

2.3.5 2.3.6

3. Melaksanakan strategi

(a) $h(t) = -5t^2 + 14t + 3$

$$= -5\left(t^2 - \frac{14}{5}t - \frac{3}{5}\right) \longleftarrow \text{Jadikan pekali } t^2 \text{ sebagai 1}$$

$$= -5\left(t^2 - \frac{14}{5}t + \left(-\frac{7}{5}\right)^2 - \left(-\frac{7}{5}\right)^2 - \frac{3}{5}\right) \longleftarrow \text{Tambah dan tolak } \left(\frac{\text{pekali } t}{2}\right)^2$$

$$= -5\left[\left(t - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{64}{25}\right]$$

$$= -5\left(t - \frac{7}{5}\right)^2 + \frac{64}{5} \longleftarrow \text{Verteks ialah } \left(\frac{7}{5}, \frac{64}{5}\right)$$

Oleh sebab $a < 0$, maka nilai maksimum bagi $h(t)$ ialah $\frac{64}{5}$ apabila $t = \frac{7}{5}$.

Oleh itu, tinggi maksimum yang dicapai oleh lembing ialah $\frac{64}{5}$ meter = 12.8 meter.

(b)
$$h(t) = 0$$
$$-5t + 14t + 3 = 0$$
$$5t^2 - 14t - 3 = 0$$
$$(5t + 1)(t - 3) = 0$$
$$t = -\frac{1}{5} \text{ (diabaikan) atau } t = 3$$

Maka, masa apabila lembing menyentuh permukaan tanah ialah 3 saat.

4. Membuat refleksi

Fungsi $h(t) = -5t^2 + 14t + 3$.

(a) Koordinat bagi tinggi maksimum:

$$t = -\frac{b}{2a}$$
$$= -\frac{14}{2(-5)}$$
$$= 1.4$$

Gantikan $t = 1.4$ ke dalam fungsi kuadratik,

$$h(1.4) = -5(1.4)^2 + 14(1.4) + 3$$
$$= 12.8$$

Maka, tinggi maksimum yang dicapai oleh lembing ialah 12.8 meter selepas 1.4 saat.

(b) Pada masa 3 saat:

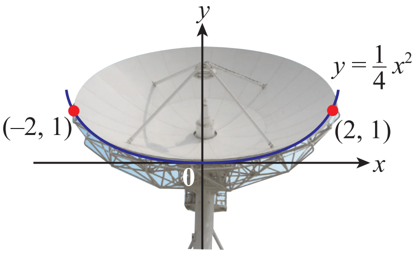
$$h(t) = -5(3)^2 + 14(3) + 3$$
$$= -45 + 42 + 3$$
$$= 0$$

Latih Diri 2.11

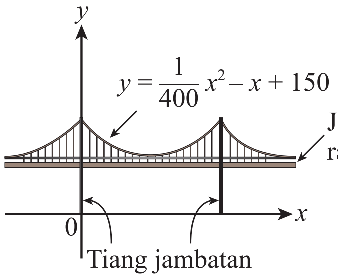
1. Fungsi $h(t) = -5t^2 + 8t + 4$ mewakili ketinggian h, dalam meter, seorang penerjun daripada permukaan air di sebuah kolam renang, t saat selepas terjun dari sebuah pelantar. Cari
(a) tinggi pelantar dari permukaan air, dalam meter,
(b) masa yang dicapai oleh penerjun itu pada ketinggian maksimumnya, dalam saat,
(c) tinggi maksimum yang dicapai oleh penerjun itu, dalam meter,
(d) julat masa selama penerjun itu berada di udara, dalam saat.

2. Sebuah terowong di lebuh raya berbentuk parabola. Tinggi lengkung parabola terowong itu, dalam meter, diberi oleh fungsi $h(x) = 15 - 0.06x^2$, dengan keadaan x ialah lebar terowong itu, dalam meter.
(a) Tentukan tinggi maksimum terowong itu, dalam meter.
(b) Cari lebar terowong itu, dalam meter.

3. Rajah di sebelah menunjukkan keratan rentas bagi sebuah satelit parabola yang fungsinya boleh diwakili oleh $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, dengan keadaan x dan y diukur dalam meter. Cari lebar dan kedalaman parabola itu, dalam meter.



4. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah jambatan. Fungsi kabel di antara dua tiang jambatan itu boleh diwakili oleh $y = \frac{1}{400}x^2 - x + 150$, dengan keadaan x dan y diukur dalam meter. Titik minimum bagi kabel terletak di atas jalan raya di tengah-tengah dua tiang itu.
(a) Berapakah jarak titik minimum itu dengan setiap tiang?
(b) Berapakah tinggi jalan raya dari permukaan air?



Latihan Intensif 2.3

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2Y6xlus untuk Kuiz

1. Cari nilai-nilai atau julat nilai k, jika fungsi kuadratik
(a) $f(x) = kx^2 - 4x + k - 3$ mempunyai hanya satu pintasan-x,
(b) $f(x) = 3x^2 - 4x - 2(2k + 4)$ menyilang paksi-x pada dua titik yang berbeza.

2. Cari nilai terkecil bagi integer m dengan keadaan fungsi $f(x) = mx^2 + 7x + 3$ sentiasa positif untuk semua nilai nyata x.

3. Fungsi kuadratik f ditakrifkan oleh $f(x) = x^2 + 6x + n$, dengan keadaan n ialah pemalar.
(a) Ungkapkan $f(x)$ dalam bentuk $(x - h)^2 + k$, dengan keadaan h dan k ialah pemalar.
(b) Diberi nilai minimum bagi $f(x)$ ialah –5, cari nilai n.
(c) Lakarkan lengkung $f(x)$.

2.3.6

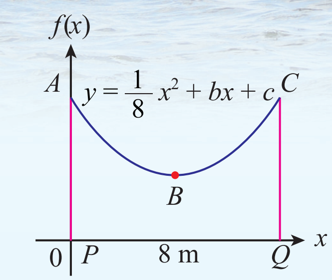
4. Cari julat nilai r dengan keadaan garis $y = rx + 4$ tidak menyilang lengkung $y = x^2 - 4x + 5$. Nyatakan nilai-nilai r dengan keadaan garis $y = rx + 4$ ialah tangen kepada lengkung $y = x^2 - 4x + 5$.

5. Terangkan kesan setiap perubahan fungsi berikut terhadap bentuk dan kedudukan graf.
(a) Mengubah $f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$ kepada $f(x) = 6(x - 1)^2 + 2$.
(b) Mengubah $f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$ kepada $f(x) = 3(x - 4)^2 + 2$.
(c) Mengubah $f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$ kepada $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$.

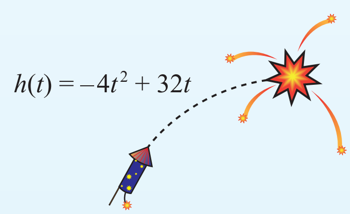
6. Ketinggian, h, dalam meter, seekor burung untuk menangkap ikan di sebuah tasik boleh diwakili oleh fungsi $h(t) = 2(t - 3)^2$, dengan keadaan t ialah masa, dalam saat, apabila burung tersebut mula bergerak untuk menangkap ikan.
(a) Lakarkan graf $h(t)$.
(b) Gerakan seekor burung lain pula diwakili oleh fungsi $r(t) = 2h(t)$. Lakarkan graf $r(t)$.
(c) Bandingkan graf $h(t)$ dengan $r(t)$. Burung yang manakah mula bergerak pada kedudukan tertinggi? Jelaskan.

7. Diberi fungsi kuadratik $f(x) = 3 - 4k - (k + 3)x - x^2$, dengan keadaan k ialah pemalar, adalah sentiasa negatif apabila $p < k < q$. Cari nilai p dan nilai q.

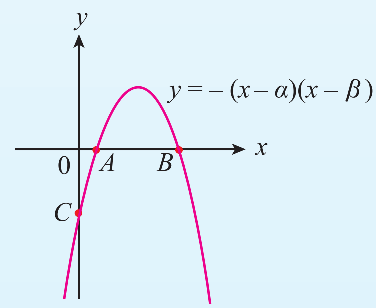
8. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah jambatan PQ dengan panjang 8 m yang melintasi sebatang sungai. Kabel penyokong ABC pada jambatan itu boleh diwakili oleh fungsi $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + bx + c$, dengan keadaan b dan c ialah pemalar.
(a) Cari nilai b.
(b) Cari julat nilai c dengan keadaan titik minimum B pada kabel itu sentiasa berada di atas PQ.
(c) Cari nilai c jika B adalah 2 m di atas PQ.



9. Fungsi $h(t) = -4t^2 + 32t$ seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah mewakili tinggi, dalam meter, bunga api, t saat selepas dilancarkan. Bunga api itu meletup pada titik tertinggi.
(a) Bilakah bunga api itu meletup?
(b) Pada ketinggian berapakah bunga api itu meletup?



10. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $y = -(x - \alpha)(x - \beta)$, dengan keadaan $\alpha < \beta$.
(a) Diberi bahawa M ialah titik tengah bagi AB, ungkapkan panjang yang berikut, dalam sebutan α dan/atau β.
(i) OA (ii) OB
(iii) OC (iv) OM
(b) Secara geometri, bolehkah anda tafsirkan $\frac{\alpha + \beta}{2}$ dan $-\alpha\beta$ dalam rajah itu?



11. Nilai minimum bagi $f(x) = x^2 - 4nx + 5n^2 + 1$ ialah $m^2 + 2n$ dengan keadaan m dan n ialah pemalar. Tunjukkan bahawa $m = n - 1$.

RUMUSAN BAB 2

TULIS JURNAL ANDA

Perkataan kuadratik berasal daripada perkataan *quad* yang bermaksud empat tetapi suatu persamaan kuadratik melibatkan polinomial dengan kuasa tertinggi 2. Buat kajian tentang asal usul perkataan kuadratik yang berkaitan dengan persamaan kuadratik. Hasilkan satu folio grafik tentang kajian anda.

LATIHAN PENGUKUHAN

1. Selesaikan persamaan kuadratik $3x(x - 4) = (2 - x)(x + 5)$. Tulis jawapan betul kepada tiga tempat perpuluhan. TP2

2. Diberi persamaan kuadratik $(x - 4)^2 = 3$. TP2
(a) Ungkapkan persamaan itu dalam bentuk am, $ax^2 + bx + c = 0$.
(b) Nyatakan hasil tambah dan hasil darab punca bagi persamaan itu.
(c) Tentukan jenis punca bagi persamaan itu.

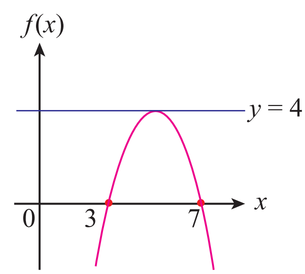
3. Cari nilai-nilai k atau julat nilai k dengan keadaan persamaan $x^2 + kx = k - 8$ mempunyai TP2
(a) dua punca yang sama,
(b) dua punca yang nyata dan berbeza,
(c) punca nyata.

4. Diberi persamaan kuadratik $3x^2 + px - 8 = 0$, dengan p ialah pemalar. Cari nilai p jika TP2
(a) satu daripada punca-punca persamaan itu ialah -2,
(b) hasil tambah punca persamaan itu ialah $\frac{1}{3}$.

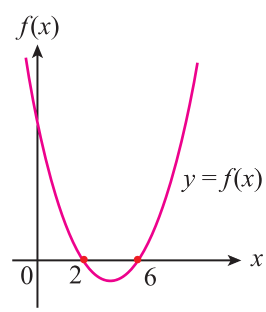
5. Diberi bahawa $3hx^2 - 7kx + 3h = 0$ mempunyai dua punca nyata yang sama, dengan h dan k ialah positif. Cari nisbah $h : k$ dan selesaikan persamaan tersebut. TP3

6. Cari julat nilai x bagi $x^2 - 7x + 10 > 0$ dan $x^2 - 7x \leqslant 0$. Seterusnya, selesaikan ketaksamaan $-10 < x^2 - 7x \leqslant 0$. TP5

7. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi fungsi kuadratik $f(x) = -\frac{1}{3}[(x + p)^2 + q]$. Garis $y = 4$ ialah tangen kepada lengkung itu. Cari TP3
(a) punca-punca bagi $f(x) = 0$,
(b) nilai p dan nilai q,
(c) persamaan paksi simetri bagi lengkung itu,
(d) julat nilai x apabila $f(x)$ ialah positif.



8. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $f(x) = x^2 + bx + c$, dengan keadaan b dan c ialah pemalar. Cari TP3
(a) nilai b dan nilai c,
(b) koordinat titik minimum,
(c) julat nilai x apabila $f(x)$ ialah negatif,
(d) nilai maksimum apabila graf itu dipantulkan pada paksi-x.



9. Sebuah bot menuju ke timur sejauh 24 km dengan arus 3 km/j. Perjalanan pergi dan balik mengambil masa 6 jam. Cari halaju bot, dalam km/j, jika bot itu mengekalkan halaju sekata. TP5

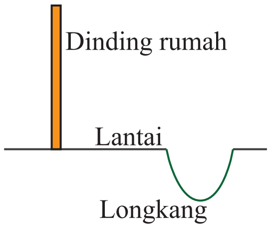
10. Sebuah buku purba China, iaitu Jiuzhang Suanshu yang bermaksud ‘Sembilan Bab mengenai Seni Matematik’ mengandungi masalah berikut. TP4

> “Tinggi sebuah pintu yang berbentuk segi empat tepat ialah 6.8 unit lebih daripada lebarnya dan panjang antara dua bucu bertentangan ialah 100 unit, cari lebar pintu itu”.

Menggunakan rumus kuadratik, selesaikan masalah tersebut.

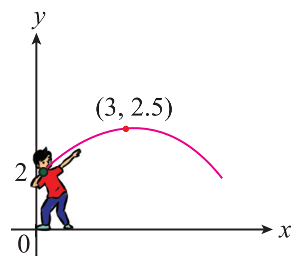
11. Rajah di sebelah menunjukkan keratan rentas sebuah longkang yang mengelilingi sebuah rumah. Jika bentuk longkang itu diwakili oleh persamaan $y = \frac{1}{5}x^2 - 24x + 700$, cari TP5

(a) lebar bukaan longkang itu,
(b) kedalaman minimum longkang itu.



12. Pergerakan bola besi yang dilontarkan oleh Krishna dalam suatu pertandingan boleh diwakili oleh graf fungsi kuadratik seperti dalam rajah di sebelah. Bola besi itu dilontarkan pada ketinggian 2 m dan laluannya melalui titik maksimum (3, 2.5). TP4

(a) Ungkapkan persamaan laluan bola besi itu dalam bentuk $y = a(x - h)^2 + k$ dengan keadaan a, h dan k ialah pemalar.
(b) Cari jarak mengufuk maksimum bagi lontaran yang dilakukan oleh Krishna dalam m.



Penerokaan MATEMATIK

Fungsi bagi tiga pancutan air berbentuk parabola yang berbeza pada sebuah kolam adalah seperti berikut.

Pancutan air I: $h = -3d^2 + 4$

Pancutan air II: $h = -3.5d^2 + 3$

Pancutan air III: $h = -0.5d^2 + 1$

Bagi setiap fungsi, h meter mewakili tinggi pancutan air dan d meter ialah jarak mengufuk pancutan air itu. Berdasarkan fungsi yang diberi, jawab soalan berikut dan terangkan alasan anda.

(a) Pancutan air yang manakah mengeluarkan air daripada titik yang tertinggi?
(b) Pancutan air yang manakah mengikuti laluan yang paling sempit?
(c) Pancutan air yang manakah mempunyai jarak yang paling jauh?

BAB 3 Sistem Persamaan

Apakah yang akan dipelajari?

- Sistem Persamaan Linear dalam Tiga Pemboleh Ubah
- Persamaan Serentak yang Melibatkan Satu Persamaan Linear dan Satu Persamaan Tak Linear

Senarai Standard Pembelajaran

bit.ly/2LI9ltE

KATA KUNCI

- Sistem persamaan — *System of equations*
- Pemboleh ubah — *Variable*
- Persamaan linear — *Linear equation*
- Persamaan tak linear — *Non-linear equation*
- Kaedah penghapusan — *Elimination method*
- Kaedah penggantian — *Substitution method*
- Perwakilan graf — *Graphical method*

Kampung Kebudayaan Monsopiad di Sabah berjaya menjual 30 keping tiket dewasa kepada pelancong asing dengan kutipan sebanyak RM1 100. Harga sekeping tiket pakej jalan-jalan ialah RM30, manakala harga sekeping tiket pakej beropsyen ialah RM45 dan harga sekeping tiket pakej standard ialah RM55. Bilangan tiket pakej jalan-jalan yang dijual ialah dua kali ganda jumlah tiket pakej beropsyen dan pakej standard. Bagaimanakah anda dapat menentukan bilangan tiket yang dijual bagi setiap pakej itu?

Tahukah Anda?

Penyelesaian kepada sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah boleh diperoleh dengan menggunakan kaedah penghapusan Gauss. Kaedah ini telah dicipta oleh Friedrich Gauss, seorang ahli matematik berbangsa Jerman pada sekitar tahun 1810. Kaedah ini ialah satu kaedah alternatif jika anda tidak mempunyai kalkulator grafik atau perisian.

Untuk maklumat lanjut:

bit.ly/2LkM5pk

SIGNIFIKAN BAB INI

- Bidang kejuruteraan menggunakan sistem persamaan untuk menyelesaikan masalah melibatkan voltan, arus dan rintangan.
- Jurutera bidang bioperubatan, kimia, elektrik, mekanikal dan nuklear menggunakan sistem persamaan untuk mendapatkan ukuran pepejal dan cecair.

Imbas kod *QR* ini untuk menonton video tarian tradisional kaum Kadazandusun di Kampung Kebudayaan Monsopiad.

bit.ly/2FNZjXk

3.1 Sistem Persamaan Linear dalam Tiga Pemboleh Ubah

Memerihalkan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

Teliti harga pakej yang ditawarkan di sebuah panggung wayang dalam iklan di sebelah. Bagaimanakah cara untuk menentukan harga bagi sekeping tiket, sebotol minuman dan sebekas bertih jagung?

Tiga persamaan linear boleh dibentuk dengan pemboleh ubah x, y dan z masing-masing mewakili harga sekeping tiket, harga sebotol minuman dan harga sebekas bertih jagung.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 13 \\ 2x + 2y + z &= 17 \\ 3x + 3y + 2z &= 27 \end{aligned}$$

Persamaan linear yang dibentuk ini dikenali sebagai sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah. Sistem persamaan linear bermaksud, terdapat dua atau lebih persamaan linear yang melibatkan set pemboleh ubah yang sama. Bentuk umum bagi suatu persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah boleh ditulis seperti berikut:

$ax + by + cz = d$, dengan keadaan a, b dan c bukan sifar.

IMBAS KEMBALI

Persamaan linear ialah persamaan dengan kuasa pemboleh ubahnya ialah 1.

Mari kita lihat cara sistem tiga persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah dapat digambarkan dalam bentuk satah tiga dimensi.

INKUIRI 1 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Memerihalkan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada ketiga-tiga petak untuk memaparkan tiga satah bagi persamaan $x - 3y + z = 4$, $x - 3y + 3z = 4$ dan $x - 3y + 3z = 0$.
3. Perhatikan ketiga-tiga satah tersebut.
4. Bincang dengan rakan sekumpulan tentang pemerhatian anda dan catatkan hasil dapatan pada sehelai kertas.
5. Setiap kumpulan bergerak ke kumpulan yang lain untuk membandingkan hasil dapatan yang diperoleh.

ggbm.at/zpp8fk4k

Hasil daripada Inkuiri 1, didapati bahawa:

> Sistem tiga persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah mempunyai tiga paksi, iaitu paksi-x, paksi-y dan paksi-z. Ketiga-tiga persamaan linear tersebut membentuk satah pada setiap paksi.

INKUIRI 2 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Membandingkan sistem persamaan linear dalam dua pemboleh ubah dan tiga pemboleh ubah

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada kedua-dua petak untuk memaparkan dua garis lurus.
3. Perhatikan kedua-dua garis lurus tersebut dan catatkan pemerhatian ahli kumpulan anda pada sehelai kertas.
4. Bandingkan hasil dapatan kumpulan anda dengan hasil dapatan dalam Inkuiri 1.
5. Bentangkan perbandingan tersebut di hadapan kelas.

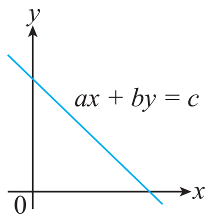
ggbm.at/daueydzy

Hasil daripada Inkuiri 2, didapati bahawa hanya terdapat dua paksi, iaitu paksi-x dan paksi-y.

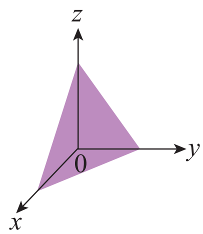
> Setiap persamaan linear dalam dua pemboleh ubah membentuk garis lurus pada setiap paksi.

Amnya, persamaan linear dalam dua pemboleh ubah boleh ditulis sebagai $ax + by = c$ dengan a, b dan c adalah pemalar. Secara geometri, persamaan linear dalam dua pemboleh ubah yang dilakarkan pada suatu satah akan membentuk satu garis lurus seperti Rajah 1(a).

Persamaan linear yang mempunyai tiga pemboleh ubah pula boleh ditulis sebagai $ax + by + cz = d$ dengan a, b, c dan d adalah pemalar. Apabila dilakarkan, satu satah dalam ruang tiga dimensi akan terbentuk seperti Rajah 1(b).



Rajah 1(a)



Rajah 1(b)

Contoh 1

Perihalkan sama ada persamaan-persamaan yang berikut ialah sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah atau bukan.

(a) $2x + 4y - z = 10$
$x + y = 10z^2$
$5y - z - 2x = 3$

(b) $p + 8q - 4r = 2$
$2(p + 6r) + 7q = 0$
$10r + p = 5q$

Penyelesaian

(a) Bukan, kerana terdapat persamaan yang mempunyai kuasa pemboleh ubah bernilai 2.
(b) Ya, kerana ketiga-tiga persamaan mempunyai tiga pemboleh ubah, p, q dan r, dengan kuasa pemboleh ubah bernilai 1.

Latih Diri 3.1

1. Bentukkan persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah bagi pernyataan berikut.

> Aiman membeli 3 helai seluar, 2 helai baju dan sepasang kasut.
> Dia membelanjakan RM750 untuk semua barang yang dibeli.

2. Terangkan sama ada persamaan-persamaan yang berikut ialah suatu sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah atau bukan.

(a) $2m + 6(n - 2p) = 4$
$n = 5m + p$
$4m + p = \dfrac{2m}{5}$

(b) $e(12 - 6g) = f^2$
$8e + 6 - 2f - 9g = 0$
$17f + e = 6 + 2e$

(c) $7a - c = 6b$
$3 - 4c = 10a + b$
$\dfrac{a}{6} + 3b = 2(c + b)$

Menyelesaikan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

INKUIRI 3 Berkumpulan

Tujuan: Menyelesaikan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada ketiga-tiga petak untuk memaparkan tiga satah bagi persamaan linear $2x + y + z = 3$, $-x + 2y + 2z = 1$ dan $x - y - 3z = -6$.
3. Adakah terdapat titik persilangan antara ketiga-tiga satah itu? Perhatikan titik persilangan yang terbentuk dan nyatakan titik persilangan (x, y, z) antara ketiga-tiga satah tersebut.
4. Tentukan sama ada titik persilangan (x, y, z) itu adalah penyelesaian bagi ketiga-tiga persamaan linear.
5. Catatkan pandangan setiap ahli kumpulan tentang perkaitan antara titik persilangan dengan penyelesaian persamaan linear dan bincangkan.

ggbm.at/pucgdzuh

Hasil daripada Inkuiri 3, persilangan antara ketiga-tiga satah yang terbentuk ialah penyelesaian bagi ketiga-tiga persamaan linear tersebut. Dalam kes ini, terdapat hanya satu penyelesaian sahaja kerana satah-satah tersebut bersilang hanya pada satu titik.

INKUIRI 4 Berkumpulan

Tujuan: Menyelesaikan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada ketiga-tiga petak untuk memaparkan tiga satah bagi persamaan linear $x - 2y = 4$, $2x - 3y + 2z = -2$ dan $4x - 7y + 2z = 6$.
3. Adakah terdapat titik persilangan antara ketiga-tiga satah itu? Perhatikan titik persilangan yang terbentuk.
4. Catatkan pandangan setiap ahli kumpulan tentang perkaitan antara titik persilangan tersebut dengan penyelesaian persamaan linear dan bincangkan.

ggbm.at/z4spaqsa

Hasil daripada Inkuiri 4, didapati ketiga-tiga satah bersilang pada satu garis lurus. Ini menunjukkan bahawa sistem persamaan linear ini mempunyai penyelesaian yang tak terhingga.

INKUIRI 5 **Berkumpulan**

Tujuan: Menyelesaikan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada ketiga-tiga petak untuk memaparkan tiga satah bagi persamaan linear $2x - 4y + z = 3$, $4x + 8y + 2z = 14$ dan $x - 2y + 0.5z = -1$.
3. Adakah terdapat titik persilangan antara ketiga-tiga satah itu?
4. Catatkan pandangan setiap ahli kumpulan dan bincangkan.

ggbm.at/f78fpv6h

Hasil daripada Inkuiri 5, didapati bahawa satah-satah bagi ketiga-tiga persamaan linear itu tidak bersilang pada mana-mana titik. Ini menunjukkan bahawa sistem persamaan linear ini tidak mempunyai penyelesaian.

Hasil daripada Inkuiri 3, 4 dan 5 menunjukkan bahawa terdapat tiga jenis penyelesaian yang melibatkan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah seperti yang ditunjukkan dalam rajah di bawah.

Penyelesaian sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

- **Satu penyelesaian**: Satah-satah bersilang hanya pada satu titik sahaja
- **Penyelesaian tak terhingga**: Satah-satah bersilang pada satu garis lurus
- **Tiada penyelesaian**: Satah-satah tidak bersilang pada mana-mana titik

Sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah boleh diselesaikan dengan mencari nilai-nilai pemboleh ubah yang memuaskan ketiga-tiga persamaan linear itu. Kaedah yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah ialah kaedah penghapusan atau penggantian.

Langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah dengan menggunakan kaedah penghapusan dan penggantian adalah serupa dengan kaedah penyelesaian persamaan serentak dalam dua pemboleh ubah.

SUMBANG SARAN

Dengan menggunakan perisian *GeoGebra*, tentukan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah yang mempunyai;
(a) satu penyelesaian sahaja,
(b) penyelesaian tak terhingga.

IMBAS KEMBALI

Persamaan linear serentak dengan dua pemboleh ubah dapat diselesaikan dengan kaedah graf, kaedah penggantian atau kaedah penghapusan.

IMBAS KEMBALI

Terdapat tiga kes yang melibatkan penyelesaian persamaan serentak dengan dua pemboleh ubah. Apabila kedua-dua garis:

- Bersilang antara satu sama lain, persamaan mempunyai penyelesaian unik.
- Selari antara satu sama lain, persamaan tidak mempunyai penyelesaian.
- Bertindih antara satu sama lain, persamaan mempunyai penyelesaian tak terhingga.

Contoh 2

Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut dengan menggunakan kaedah penghapusan.

$$4x - 3y + z = -10$$
$$2x + y + 3z = 0$$
$$-x + 2y - 5z = 17$$

Penyelesaian

Pilih mana-mana dua persamaan.

$$4x - 3y + z = -10 \quad \cdots ①$$
$$2x + y + 3z = 0 \quad \cdots ②$$

Darabkan persamaan ② dengan 2 supaya pemboleh ubah x mempunyai pekali yang sama.

② × 2: $4x + 2y + 6z = 0 \quad \cdots ③$

Hapuskan pemboleh ubah x dengan menolak ① daripada ③.

③ – ①: $5y + 5z = 10 \quad \cdots ④$

Pilih lagi dua persamaan.

$$2x + y + 3z = 0 \quad \cdots ⑤$$
$$-x + 2y - 5z = 17 \quad \cdots ⑥$$

Darabkan persamaan ⑥ dengan 2 supaya pemboleh ubah x mempunyai pekali yang sama.

⑥ × 2: $-2x + 4y - 10z = 34 \quad \cdots ⑦$

⑤ + ⑦: $5y - 7z = 34 \quad \cdots ⑧$

④ – ⑧: $12z = -24$

$z = -2$

Gantikan $z = -2$ ke dalam ⑧.

$$5y - 7(-2) = 34$$
$$5y + 14 = 34$$
$$5y = 20$$
$$y = 4$$

Gantikan $y = 4$ dan $z = -2$ ke dalam ①.

$$4x - 3(4) + (-2) = -10$$
$$4x - 12 - 2 = -10$$
$$4x = 4$$
$$x = 1$$

Maka, $x = 1$, $y = 4$ dan $z = -2$ ialah penyelesaian bagi sistem persamaan linear ini.

PANTAS KIRA

Menentukan penyelesaian dalam Contoh 2 dengan menggunakan kalkulator saintifik.

1. Tekan MENU.
2. Tekan ▼ sebanyak dua kali.
3. Tekan ALPHA (–).
4. Tekan 1 untuk Simul Equation.
5. Tekan 3.
6. Masukkan nilai pekali x, y dan z:
   Tekan 4 =, –3 =,
   1 =, –10 =, 2 =,
   1 =, 3 =, 0 =,
   –1 =, 2 =, –5 =,
   17 =.
7. Skrin akan memaparkan:

x	1

   Tekan =

y	4

   Tekan =

z	–2

Maka, $x = 1$, $y = 4$ dan $z = -2$.

Contoh 3

Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut dengan menggunakan kaedah penggantian.

$$3x - y - z = -120$$
$$y - 2z = 30$$
$$x + y + z = 180$$

Penyelesaian

$3x - y - z = -120$ ⋯ ①

$y - 2z = 30$ ⋯ ②

$x + y + z = 180$ ⋯ ③

Daripada ①, $z = 3x - y + 120$ ⋯ ④

Ungkapkan z dalam sebutan x dan y

Gantikan ④ ke dalam ②.

$$y - 2(3x - y + 120) = 30$$
$$y - 6x + 2y - 240 = 30$$
$$-6x + 3y = 270$$
$$y = 90 + 2x \quad \cdots ⑤$$

Ungkapkan y dalam sebutan x

Gantikan ④ dan ⑤ ke dalam ③.

$$x + (90 + 2x) + [3x - (90 + 2x) + 120] = 180$$
$$x + 2x + 3x - 2x + 90 - 90 + 120 = 180$$
$$4x = 60$$
$$x = 15$$

Gantikan $x = 15$ ke dalam ⑤.

$$y = 90 + 2(15)$$
$$= 120$$

Gantikan $x = 15$ dan $y = 120$ ke dalam ③.

$$15 + 120 + z = 180$$
$$z = 45$$

Maka, $x = 15$, $y = 120$ dan $z = 45$ ialah penyelesaian bagi sistem persamaan linear ini.

QR

Kaedah penghapusan Gauss juga boleh digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear. Layari pautan ini untuk mengetahui dengan lebih lanjut kaedah penghapusan Gauss.

bit.ly/2ITQAFl

Cabar Minda

Selesaikan Contoh 3 dengan kaedah penghapusan. Adakah anda mendapat penyelesaian yang sama?

BAB 3

Contoh 4

Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut.

$$x - y + 3z = 3$$
$$-2x + 2y - 6z = 6$$
$$y - 5z = -3$$

Penyelesaian

$x - y + 3z = 3$ ⋯ ①

$-2x + 2y - 6z = 6$ ⋯ ②

$y - 5z = -3$ ⋯ ③

Oleh sebab persamaan ③ hanya mempunyai dua pemboleh ubah sahaja, iaitu y dan z, maka pemboleh ubah x dalam persamaan ① dan ② perlu dihapuskan.

① × 2: $2x - 2y + 6z = 6$ ⋯ ④

④ + ②: $0 + 0 + 0 = 12$

$$0 = 12$$

Maka, sistem persamaan linear ini tiada penyelesaian kerana $0 \neq 12$.

QR

Penyelesaian Contoh 4 menggunakan perisian *GeoGebra*.

ggbm.at/wxktwrwx

3.1.2

Contoh 5

Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut.

$$\begin{aligned} 3x + 5y - 2z &= 13 \\ -5x - 2y - 4z &= 20 \\ -14x - 17y + 2z &= -19 \end{aligned}$$

Penyelesaian

$3x + 5y - 2z = 13$ ··· ①

$-5x - 2y - 4z = 20$ ··· ②

$-14x - 17y + 2z = -19$ ··· ③

① × 2: $6x + 10y - 4z = 26$ ··· ④

④ – ②: $11x + 12y = 6$ ··· ⑤

① + ③: $-11x - 12y = -6$ ··· ⑥

⑤ + ⑥: $0 + 0 = 0$

$0 = 0$

Darabkan persamaan ① dengan 2 untuk menghapuskan pemboleh ubah z

Maka, sistem persamaan linear ini mempunyai penyelesaian tak terhingga kerana $0 = 0$.

Latih Diri 3.2

1. Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut dengan kaedah penghapusan.

(a) $7x + 5y - 3z = 16$
$3x - 5y + 2z = -8$
$5x + 3y - 7z = 0$

(b) $4x - 2y + 3z = 1$
$x + 3y - 4z = -7$
$3x + y + 2z = 5$

2. Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut dengan kaedah penggantian.

(a) $2x + y + 3z = -2$
$x - y - z = -3$
$3x - 2y + 3z = -12$

(b) $2x + 3y + 2z = 16$
$x + 4y - 2z = 12$
$x + y + 4z = 20$

Menyelesaikan masalah melibatkan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

Contoh 6

APLIKASI MATEMATIK

Tommy mempunyai tiga unit kondominium, iaitu jenis A dengan 1 bilik tidur, jenis B dengan 2 bilik tidur dan jenis C dengan 3 bilik tidur. Kesemua unit kondominium itu disewakan dan jumlah sewa yang diperoleh ialah RM1 240 sehari. Tommy perlu menyimpan 10% daripada harga sewa unit jenis A, 20% daripada harga sewa unit jenis B dan 30% daripada harga sewa unit jenis C untuk kos penyenggaraan. Jumlah simpanan sehari ialah sebanyak RM276. Harga sewa bagi unit jenis C adalah dua kali harga sewa bagi unit jenis A. Berapakah harga sewa sehari bagi setiap unit kondominium milik Tommy?

3.1.2 3.1.3

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Jumlah sewa ialah RM1 240 sehari.
- Simpanan untuk kos penyenggaraan:
  - Unit jenis A ialah 10% daripada harga sewa.
  - Unit jenis B ialah 20% daripada harga sewa.
  - Unit jenis C ialah 30% daripada harga sewa.
- Jumlah simpanan sehari ialah RM276.
- Harga sewa unit jenis C adalah dua kali harga sewa unit jenis A.

2. Merancang strategi

- Tiga persamaan yang dibentuk melibatkan jumlah sewa sehari, jumlah simpanan sehari dan harga sewa jenis C.
- Katakan harga sewa unit jenis A ialah a, harga sewa unit jenis B ialah b dan harga sewa unit jenis C ialah c.

3. Melaksanakan strategi

$$a + b + c = 1\ 240 \quad \cdots ①$$
$$0.1a + 0.2b + 0.3c = 276 \quad \cdots ②$$
$$c = 2a \quad \cdots ③$$
$$② \times 10: a + 2b + 3c = 2\ 760 \quad \cdots ④$$
$$① \times 2: 2a + 2b + 2c = 2\ 480 \quad \cdots ⑤$$
$$④ - ⑤: -a + c = 280 \quad \cdots ⑥$$

Gantikan ③ ke dalam ⑥.

$$-a + 2a = 280$$
$$a = 280$$

Gantikan $a = 280$ ke dalam ③.

$$c = 2(280)$$
$$= 560$$

Gantikan $a = 280$ dan $c = 560$ ke dalam ①.

$$280 + b + 560 = 1\ 240$$
$$840 + b = 1\ 240$$
$$b = 400$$

Harga sewa bagi unit kondominium jenis A ialah RM280, unit kondominium jenis B ialah RM400 dan unit kondominium jenis C ialah RM560.

4. Membuat refleksi

Jumlah harga sewa sehari
$= 280 + 400 + 560$
$=$ RM 1 240

Jumlah simpanan sehari
$= 0.1(280) + 0.2(400) + 0.3(560)$
$= 28 + 80 + 168$
$=$ RM276

Latih Diri 3.3

1. Patricia telah melabur sebanyak RM24 500 dalam tiga amanah saham. Dia membahagi wang itu kepada tiga akaun amanah saham yang berbeza, P, Q dan R. Pada akhir tahun, dia telah mendapat keuntungan sebanyak RM1 300. Faedah tahunan bagi setiap akaun masing-masing ialah 4%, 5.5% dan 6%. Jumlah wang dalam akaun P adalah empat kali ganda jumlah wang dalam akaun Q. Berapakah jumlah wang yang telah dilaburkan dalam setiap akaun amanah saham itu?

2. Restoran Billy memesan 200 kuntum bunga sempena Hari Ibu. Mereka memesan bunga teluki yang berharga RM1.50 setiap satu, bunga mawar yang berharga RM5.75 setiap satu dan bunga daisi yang berharga RM2.60 setiap satu. Pesanan bagi bunga teluki adalah yang paling banyak manakala bilangan bunga mawar yang dipesan adalah 20 kuntum kurang daripada bunga daisi. Jumlah harga bagi kesemua bunga yang dipesan ialah RM589.50. Berapakah bilangan setiap jenis bunga yang dipesan?

3.1.3

3. Ramasamy ingin membeli beberapa batang pen, pensel dan buku nota untuk penggal sekolah yang akan datang. Dia mempunyai RM102 untuk dibelanjakan. Harga sebatang pen ialah RM5, sebatang pensel ialah RM3 dan sebuah buku nota ialah RM9. Ramasamy ingin menggunakan jumlah wang yang sama bagi pembelian pen dan pensel. Jumlah pen dan pensel yang dibeli juga perlu dalam bilangan yang sama dengan buku nota yang dibeli. Berapakah bilangan setiap item yang dibeli? Tulis satu sistem persamaan untuk menyelesaikan masalah ini.

Latihan Intensif 3.1

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2YqHPda untuk kuiz

1. Bentukkan sistem persamaan linear berdasarkan situasi yang berikut dan jawab soalan yang diberi.
(a) Hasil tambah sudut dalam sebuah segi tiga ialah 180°. Sudut yang paling besar ialah 20° lebih daripada hasil tambah dua sudut yang lain dan 10° lebih daripada tiga kali ganda sudut yang paling kecil. Berapakah ukuran setiap sudut dalam segi tiga tersebut?
(b) Hasil tambah tiga nombor ialah 19. Jika nombor pertama didarab dengan 2, hasil tambah tiga nombor itu menjadi 22 dan jika nombor kedua didarab dengan 2, hasil tambahnya menjadi 25. Cari nilai bagi nombor-nombor tersebut.

2. Selesaikan setiap persamaan berikut dengan kaedah penghapusan dan penggantian.

(a) $x + y + z = 3$ $x + z = 2$ $2x + y + z = 5$	(b) $2x + y - z = 7$ $x - y + z = 2$ $x + y - 3z = 2$	(c) $x + y + z = 3$ $2x + y - z = 6$ $x + 2y + 3z = 2$
(d) $2x - y + z = 6$ $3x + y - z = 2$ $x + 2y - 4z = 8$	(e) $x + y + 2z = 4$ $x + y + 3z = 5$ $2x + y + z = 2$	(f) $x + 2y + z = 4$ $x - y + z = 1$ $2x + y + 2z = 2$

3. Sebuah bakeri membuat tiga jenis roti dengan kos pembuatan setiap bulan ialah RM6 850 untuk 2 150 buku roti. Kos untuk membuat sebuku roti mentega ialah RM2, sebuku roti coklat ialah RM3 dan sebuku roti kelapa ialah RM4. Harga jualan bagi sebuku roti mentega, sebuku roti coklat dan sebuku roti kelapa masing-masing ialah RM3, RM4.50 dan RM5.50. Jika keuntungan yang diperoleh setiap bulan ialah RM2 975, berapakah bilangan setiap jenis roti yang dibuat?

4. Andrea menjual beberapa buah pasu yang berlainan saiz. Pasu bersaiz kecil berharga RM10, pasu bersaiz sederhana berharga RM15 dan pasu bersaiz besar berharga RM40. Setiap bulan, bilangan pasu bersaiz kecil yang dijual adalah sama dengan jumlah pasu bersaiz sederhana dan besar yang dijual. Bilangan pasu bersaiz sederhana yang dijual pula adalah dua kali bilangan pasu bersaiz besar yang dijual. Andrea perlu membayar sewa bagi premis jualannya sebanyak RM300 sebulan. Berapakah bilangan minimum pasu bagi setiap saiz yang mesti dijual supaya dia dapat membayar sewa premis jualannya itu?

5. Encik Chong ingin membeli beberapa ekor ayam, arnab dan itik untuk ladangnya. Jumlah haiwan yang perlu dibeli ialah 50 ekor. Dia mempunyai RM1 500 untuk dibelanjakan. Seekor ayam berharga RM20, seekor arnab berharga RM50 dan seekor itik berharga RM30. Bilangan ayam dan itik yang dibeli adalah sama. Berapakah bilangan setiap haiwan yang dibeli oleh Encik Chong? Tulis satu sistem persamaan untuk menyelesaikan masalah ini.

3.2 Persamaan Serentak yang Melibatkan Satu Persamaan Linear dan Satu Persamaan Tak Linear

Menyelesaikan persamaan serentak melibatkan satu persamaan linear dan satu persamaan tak linear

INKUIRI 6 Berkumpulan PAK-21

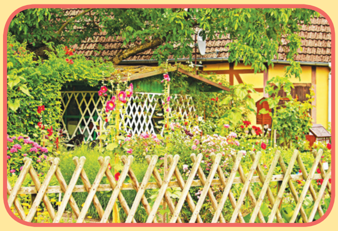
Tujuan: Mengenal persamaan serentak

Arahan:

1. Bentukkan beberapa kumpulan yang terdiri daripada tiga atau empat orang ahli.
2. Teliti setiap pernyataan yang berikut dan bentukkan persamaan yang terlibat.

PERNYATAAN 1

Chong mempunyai sebuah taman bunga yang berbentuk segi empat tepat. Panjang pagar yang digunakan untuk memagar sekeliling kawasan tamannya ialah 200 m. Luas taman itu ialah 2 400 m^2. Berapakah panjang dan lebar taman itu?



PERNYATAAN 2

Shida menjahit sehelai alas meja berbentuk segi empat tepat. Perimeter alas meja itu ialah 800 cm dan luasnya ialah 30 000 cm^2. Cari panjang dan lebar alas meja itu.

PERNYATAAN 3

Beza antara dua nombor ialah 9 dan hasil darab dua nombor itu ialah 96. Cari nilai nombor-nombor tersebut.

3. Jawab soalan-soalan yang berikut:
   (a) Berapakah bilangan persamaan yang dapat dibentuk dalam setiap pernyataan?
   (b) Berapakah bilangan pemboleh ubah yang terlibat?
4. Lakukan perbincangan antara ahli kumpulan dan catatkan hasil dapatan anda pada sehelai kertas.
5. Setiap kumpulan melantik seorang wakil untuk membentangkan hasil dapatan daripada kumpulan masing-masing di hadapan kelas.
6. Ahli kumpulan yang lain boleh bertanyakan soalan kepada wakil yang dilantik.
7. Ulang langkah 5 dan 6 sehingga semua kumpulan selesai melakukan pembentangan.

Hasil daripada Inkuiri 6, ketiga-tiga pernyataan tersebut masing-masing membentuk dua persamaan dengan dua pemboleh ubah, iaitu persamaan linear dan persamaan tak linear. Apakah ciri-ciri yang membezakan antara persamaan linear dan persamaan tak linear? Bagaimanakah cara untuk menyelesaikan persamaan serentak yang melibatkan persamaan linear dan persamaan tak linear?

3.2.1

INKUIRI 7 Individu PAK-21

Tujuan: Meneroka titik persilangan antara persamaan linear dan tak linear

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada kedua-dua petak untuk memaparkan bentuk graf bagi persamaan $x + 2y = 10$ dan $y^2 + 4x = 50$.
3. Apakah kesimpulan yang boleh dibuat tentang titik-titik persilangan kedua-dua graf itu?

ggbm.at/dhzggca9

Hasil daripada Inkuiri 7, titik persilangan antara graf bagi persamaan linear $x + 2y = 10$ dan persamaan tak linear $y^2 + 4x = 50$ ialah penyelesaian bagi kedua-dua persamaan. Penyelesaian bagi kedua-dua persamaan ini dikenali sebagai penyelesaian persamaan serentak.

Penyelesaian persamaan serentak bermaksud mencari nilai-nilai pemboleh ubah yang memuaskan persamaan-persamaan tersebut. Persamaan serentak ini boleh diselesaikan dengan kaedah penghapusan, kaedah penggantian atau kaedah perwakilan graf.

Contoh 7

Selesaikan persamaan serentak yang berikut dengan menggunakan kaedah penggantian.

$$2x + y = 4$$
$$y^2 + 5 = 4x$$

Penyelesaian

$$2x + y = 4 \quad \cdots ①$$
$$y^2 + 5 = 4x \quad \cdots ②$$

Daripada ①,

$$2x = 4 - y$$
$$x = \frac{4 - y}{2} \quad \cdots ③$$

Jadikan x sebagai perkara rumus

Gantikan ③ ke dalam ②.

$$y^2 + 5 = 4\left(\frac{4 - y}{2}\right)$$
$$y^2 + 5 = 8 - 2y$$
$$y^2 + 2y - 3 = 0$$
$$(y + 3)(y - 1) = 0$$
$$y = -3 \text{ atau } y = 1$$

Selesaikan persamaan kuadratik dengan kaedah pemfaktoran

Gantikan $y = -3$ dan $y = 1$ ke dalam ③.

$$x = \frac{4 - (-3)}{2} = \frac{7}{2} \quad \text{atau} \quad x = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2}$$

Maka, $x = \frac{7}{2}$, $y = -3$ dan $x = \frac{3}{2}$, $y = 1$ ialah penyelesaian bagi persamaan serentak ini.

Cabar Minda

Selesaikan Contoh 7 apabila y diungkapkan dalam sebutan x bagi persamaan linear $2x + y = 4$. Adakah anda akan memperoleh penyelesaian yang sama?

IMBAS KEMBALI

Persamaan kuadratik boleh diselesaikan dengan kaedah:
(a) Pemfaktoran
(b) Rumus
(c) Penyempurnaan kuasa dua

BAB 3

Contoh 8

Selesaikan persamaan serentak yang berikut dengan menggunakan kaedah penghapusan.

$$2x + y = 4$$
$$x^2 - 2xy = 3$$

Penyelesaian

$$2x + y = 4 \quad \cdots ①$$
$$x^2 - 2xy = 3 \quad \cdots ②$$
$$① \times 2x: 4x^2 + 2xy = 8x \quad \cdots ③$$
$$② + ③: \quad 5x^2 = 3 + 8x$$
$$5x^2 - 8x - 3 = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Guna kaedah rumus kuadratik

$$= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(5)(-3)}}{2(5)}$$
$$x = 1.9136 \quad \text{atau} \quad x = -0.3136$$

Gantikan $x = 1.9136$ ke dalam ①.

$$2(1.9136) + y = 4$$
$$3.8272 + y = 4$$
$$y = 0.1728$$

Gantikan $x = -0.3136$ ke dalam ①.

$$2(-0.3136) + y = 4$$
$$-0.6272 + y = 4$$
$$y = 4.6272$$

Maka, $x = 1.9136$, $y = 0.1728$ dan $x = -0.3136$, $y = 4.6272$ ialah penyelesaian bagi persamaan serentak ini.

Contoh 9

Selesaikan persamaan serentak yang berikut dengan menggunakan perwakilan graf.

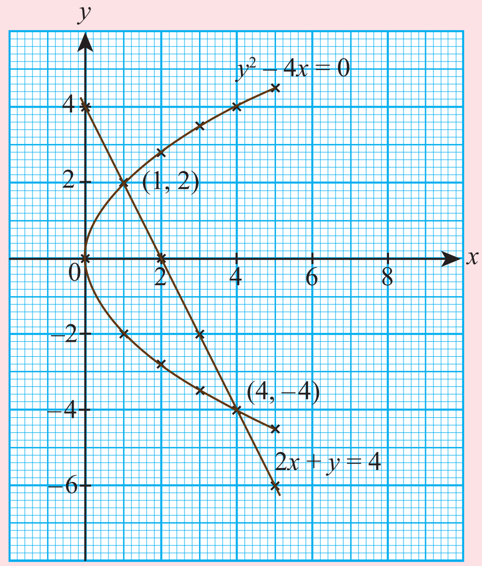
$$2x + y = 4$$
$$y^2 - 4x = 0$$

Penyelesaian

Bina jadual untuk menentukan titik-titik yang perlu diplot.

x	0	1	2	3	4	5
Nilai y bagi persamaan $2x + y = 4$	4	2	0	–2	–4	–6
Nilai y bagi persamaan $y^2 - 4x = 0$	0	±2	±2.8	±3.5	±4	±4.5

Bina graf berdasarkan nilai-nilai dalam jadual.



Graf di atas menunjukkan terdapat dua titik persilangan yang mewakili penyelesaian bagi kedua-dua persamaan. Maka, penyelesaian bagi persamaan serentak ini ialah (1, 2) dan (4, –4).

Cabar Minda

Selesaikan persamaan serentak berikut:
$2x + y = x^2 - xy + y^2 = 7$.

Celik Teknologi

Penyelesaian Contoh 9 menggunakan perisian *Desmos*.

bit.ly/2KHpcbw

Latih Diri 3.4

1. Selesaikan persamaan serentak berikut dengan menggunakan kaedah penghapusan, penggantian atau perwakilan graf.

(a) $2x - y = 7$
$y^2 - x(x + y) = 11$

(b) $5y + x = 1$
$x + 3y^2 = -1$

(c) $y = 3 - x$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$

(d) $3x + 5y = 1$
$x + 2y = \frac{4}{y}$

(e) $2x + 4y = 9$
$4x^2 + 16y^2 = 20x + 4y - 19$

(f) $x + y - 4 = 0$
$x^2 - y^2 - 2xy = 2$

2. Selesaikan persamaan serentak berikut menggunakan perwakilan graf.

(a) Lukis graf bagi pasangan persamaan berikut dengan domain $-5 \leqslant x \leqslant 5$. Seterusnya, tentukan penyelesaian persamaan serentak berikut.

$$2y - x = 1$$
$$xy + x^2 = 26$$

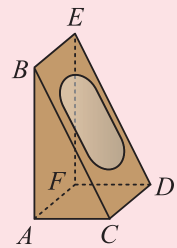
(b) Lukis graf bagi pasangan persamaan berikut dengan domain $-3 \leqslant x \leqslant 4$. Seterusnya, tentukan penyelesaian persamaan serentak berikut.

$$x - y = 2$$
$$4x^2 + 3y^2 = 36$$

Menyelesaikan masalah melibatkan persamaan serentak

Contoh 10 APLIKASI MATEMATIK

Sebuah kilang pembungkusan makanan ingin membungkus dodol dalam sebuah bekas yang berbentuk prisma tegak dengan tapak segi empat sama seperti dalam rajah. Diberi jumlah panjang sisi prisma tegak itu ialah 133 cm dan $ED = BC = 25$ cm. Adakah seketul dodol dengan isi padu 600 cm^3 dapat dibungkus di dalam bekas tersebut? Jelaskan.



Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Bekas berbentuk prisma tegak dengan tapak segi empat sama.
- Jumlah panjang sisi bekas = 133 cm
- $ED = BC = 25$ cm
- Menentukan sama ada dodol yang berisi padu 600 cm^3 dapat dibungkus ke dalam bekas.

2. Merancang strategi

- Katakan panjang sisi tapak bekas ialah x dan tinggi bekas ialah y.
- Bentukkan persamaan tak linear bagi panjang BC.
- Bentukkan persamaan linear bagi jumlah panjang sisi prisma.
- Isi padu prisma = luas keratan rentas × tinggi

3. Melaksanakan strategi

$$x^2 + y^2 = 25^2 \quad \cdots ①$$
$$5x + 2y + 50 = 133$$
$$5x + 2y = 83 \quad \cdots ②$$

Daripada ②,

$$y = \frac{83 - 5x}{2} \quad \cdots ③$$

Gantikan ③ ke dalam ①.

$$x^2 + \left(\frac{83 - 5x}{2}\right)^2 = 25^2$$
$$x^2 + \left(\frac{6\,889 - 830x + 25x^2}{4}\right) = 625$$
$$4x^2 + 25x^2 - 830x + 6\,889 - 2\,500 = 0$$
$$29x^2 - 830x + 4\,389 = 0$$
$$(29x - 627)(x - 7) = 0$$
$$x = \frac{627}{29} \quad \text{atau} \quad x = 7$$

Gantikan $x = \frac{627}{29}$ ke dalam ③.

$$y = \frac{83 - 5\left(\frac{627}{29}\right)}{2}$$
$$= -\frac{364}{29} \text{ (Abaikan)}$$

Gantikan $x = 7$ ke dalam ③.

$$y = \frac{83 - 5(7)}{2}$$
$$= 24$$

$$\text{Isi padu bekas} = \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times 24$$
$$= 588 \text{ cm}^3$$

Maka, dodol dengan isi padu 600 cm^3 tidak dapat dibungkus di dalam bekas tersebut kerana isi padu bekas tersebut ialah 588 cm^3 sahaja.

4. Membuat refleksi

Isi padu bekas = 588

$$\frac{1}{2} \times 7 \times 24 \times x = 588$$
$$x = 7 \text{ cm}$$

Gantikan nilai $x = 7$ dalam persamaan ②

$$5(7) + 2y = 83$$
$$y = 24 \text{ cm}$$

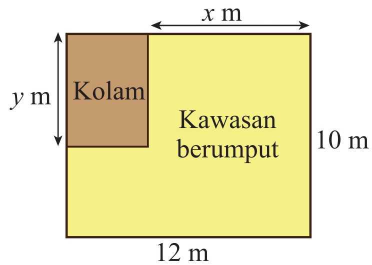
BAB 3

3.2.2

Latih Diri 3.5

1. Audy memotong sekeping papan berbentuk segi empat tepat dengan luas 72 cm^2 dan perimeter 34 cm. Hitung panjang dan lebar papan tersebut.

2. Rajah di sebelah menunjukkan pelan bagi sebuah taman berbentuk segi empat tepat yang akan dibina oleh Syarikat Pesona Alam. Terdapat sebuah kolam berbentuk segi empat tepat di bahagian bucu taman tersebut. Luas kawasan berumput ialah 96 m^2 dan perimeter kolam ialah 20 m. Hitung nilai x dan nilai y.



Latihan Intensif 3.2

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2OtFRFb untuk kuiz

1. Selesaikan persamaan serentak yang berikut.
(a) $x - 3y + 4 = 0$
$x^2 + xy - 40 = 0$
(b) $k - 3p = -1$
$p + pk - 2k = 0$

2. Cari koordinat titik persilangan bagi lengkung $\frac{x}{y} - \frac{2y}{x} = 1$ dan garis lurus $2x + y = 3$.

3. Diberi (–2, 2) ialah penyelesaian bagi persamaan serentak berikut:

$$x + \frac{1}{2}y = \frac{h}{2} \text{ dan } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = k$$

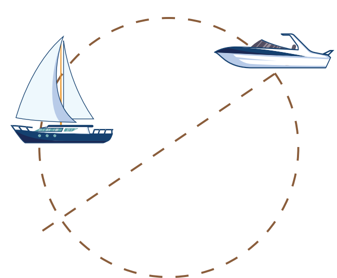
Cari nilai h dan nilai k. Seterusnya, cari penyelesaian yang satu lagi.

4. Hipotenus bagi sebuah segi tiga bersudut tegak ialah $(2x + 3)$ cm. Panjang dua sisi yang lain masing-masing ialah x cm dan $(x + y)$ cm. Diberi perimeter segi tiga itu ialah 30 cm, hitung nilai x dan nilai y.

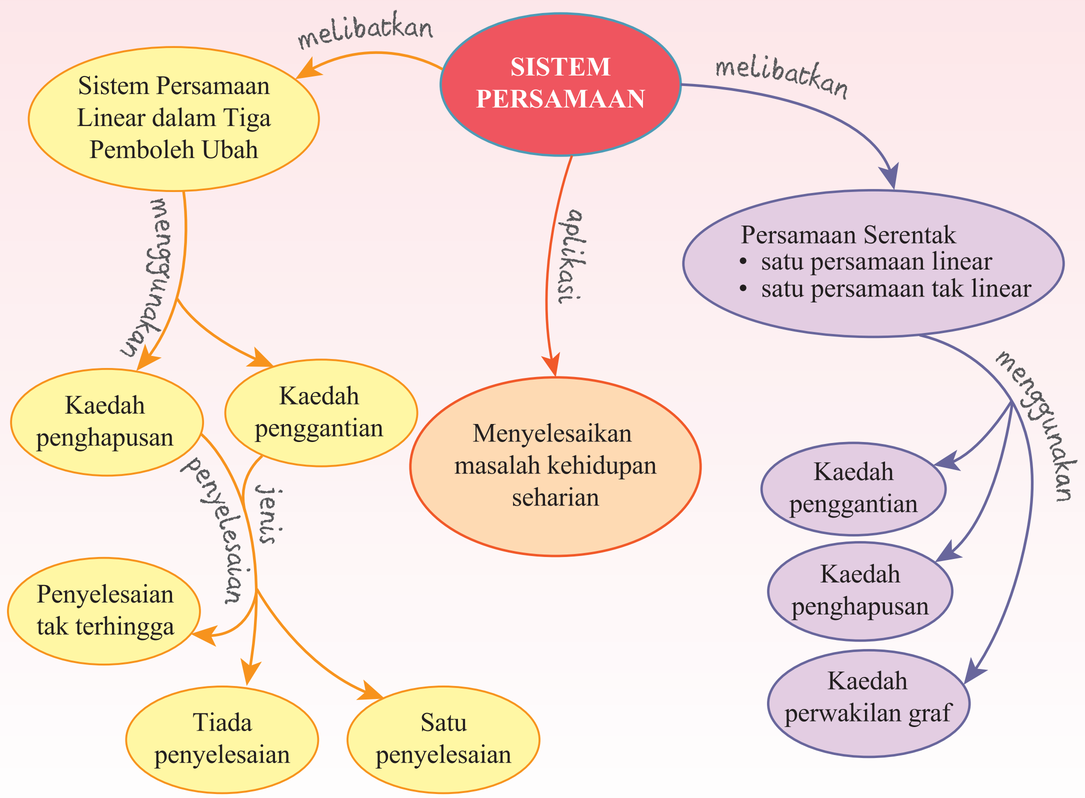
5. Diberi jumlah luas permukaan sebuah kuboid dengan tapak berbentuk segi empat sama ialah 66 cm^2 dan jumlah panjang sisi kuboid itu ialah 40 cm. Cari isi padu yang mungkin bagi kuboid tersebut.

6. Seekor ikan bergerak dalam keadaan membulat dengan persamaan lokusnya diberi sebagai $2x^2 + 11y^2 + 2x + 2y = 0$. Sebuah bot bergerak secara lurus dengan persamaan $x - 3y + 1 = 0$ dan bersilang dengan gerakan membulat ikan itu. Cari titik persilangan antara gerakan ikan dan bot tersebut.

7. Sebuah kapal layar bergerak secara membulat dengan keadaan persamaan lokusnya ialah $2x^2 + 4y^2 + 3x - 5y = 25$. Sebuah bot laju pula bergerak secara lurus dengan persamaan $y - x + 1 = 0$ dan bersilang dengan lokus bagi pergerakan kapal layar itu. Cari titik-titik persilangan antara pergerakan kapal layar dan bot laju tersebut.



RUMUSAN BAB 3



TULIS JURNAL ANDA

Fikirkan satu masalah di sekeliling anda yang dapat diselesaikan dengan menggunakan sistem persamaan linear dan tak linear. Formulasikan masalah tersebut dalam bentuk sistem persamaan linear dengan memberikan maksud pemboleh ubah yang digunakan. Nyatakan hubungan antara pemboleh-pemboleh ubah tersebut. Selesaikan sistem persamaan yang dibina. Kemudian, buat satu laporan yang berkaitan dengan masalah ini dan paparkan hasilnya di hadapan kelas.

LATIHAN PENGUKUHAN

1. Bentukkan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah bagi situasi yang berikut. TP1
   (a) Abdullah membeli senaskhah buku Sejarah, dua naskhah buku Matematik dan tiga naskhah buku Sains dengan harga RM120. Chong pula membeli dua naskhah buku Sejarah, tiga naskhah buku Matematik dan dua naskhah buku Sains dengan harga RM110 manakala Kaladevie membeli senaskhah buku sejarah, empat naskhah buku Matematik dan dua naskhah buku Sains dengan harga RM180.
   (b) Terdapat 30 keping duit syiling yang terdiri daripada duit syiling 10 sen, 20 sen dan 50 sen di dalam sebuah kotak. Jumlah nilai semua duit syiling ialah RM20.60. Salmah telah membeli aiskrim menggunakan dua keping duit syling 50 sen dan tiga keping duit syiling 20 sen.

BAB 3

2. Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut. TP2
   (a) $x - y + 2z = 3$
   $x + y - 3z = -10$
   $2x + y - z = -6$
   (b) $x + 2y + 5z = -17$
   $2x - 3y + 2z = -16$
   $3x + y - z = 3$

3. Sudut kedua bagi sebuah segi tiga ialah 50° kurang daripada empat kali sudut yang pertama. Sudut yang ketiga ialah 40° kurang daripada sudut yang pertama. Cari nilai bagi setiap sudut dalam segi tiga itu. TP3

4. Diberi $(5, h)$ ialah satu penyelesaian bagi persamaan serentak yang berikut. TP4

$$h(x - y) = x + y - 1 = hx^2 - 11y^2$$

   Cari nilai h dan penyelesaian yang lain bagi persamaan serentak itu.

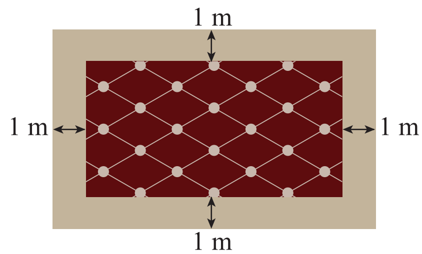
5. Punca pendapatan Raju setiap bulan adalah daripada gaji tetapnya sebagai seorang pegawai pemasaran, sewaan rumah dan perniagaan dalam talian. Jumlah pendapatan bulanan Raju ialah RM20 000. Gaji bulanannya jika ditambah RM500 adalah 2 kali ganda daripada jumlah hasil sewaan rumah dan perniagaan dalam talian. Jumlah gaji bulanan dan perniagaan dalam talian pula ialah dua kali ganda sewaan rumah. Berapakah pendapatan bulanan Raju bagi setiap punca pendapatannya? TP4

6. Encik Abu menanam sayur-sayuran di atas sebidang tanah yang berbentuk segi tiga bersudut tegak. Diberi sisi paling panjang tanah tersebut ialah p meter. Dua lagi sisi masing-masing ialah q meter dan $(2q - 1)$ meter. Encik Abu telah memagar tanah tersebut dengan menggunakan pagar sepanjang 40 meter. Cari panjang dalam meter setiap sisi tanah itu. TP4

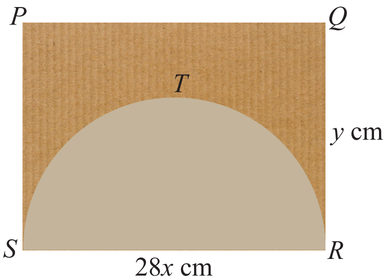
7. Buktikan bahawa suatu garis lurus yang melalui titik $(0, -3)$ menyilang suatu lengkung $x^2 + y^2 - 27x + 41 = 0$ pada titik $(2, 3)$. Adakah garis lurus itu akan menyilang lengkung itu pada titik yang lain? Jelaskan. TP4

8. Sekeping papan yang berbentuk segi empat berukuran y cm panjang dan $3x$ cm lebar. Seorang pekerja ingin memotong papan itu kepada dua keping papan kecil berbentuk segi tiga bersudut tegak. Perimeter bagi setiap segi tiga ialah 24 cm dan ukuran sisi terpanjang segi tiga itu ialah $(x + y)$ cm. Hitung luas papan asal, dalam cm^2. TP4

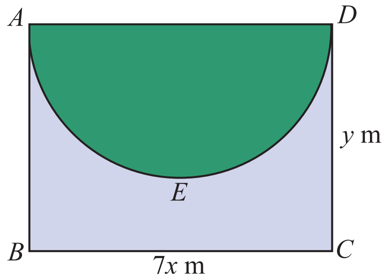
9. Rajah di sebelah menunjukkan pelan sebuah bilik yang berbentuk segi empat tepat. Sebidang karpet berbentuk segi empat tepat diletakkan pada jarak 1 m dari dinding bilik itu. Luas dan perimeter karpet itu masing-masing ialah 8.75 m^2 dan 12 m. Cari panjang dan lebar, dalam m, bagi bilik itu. TP4



10. Rajah di sebelah menunjukkan sekeping kadbod berbentuk segi empat tepat *PQRS* dengan luas 224 cm^2. Satu semibulatan *STR* telah dipotong daripada kadbod itu. Diberi perimeter kadbod yang tinggal ialah 72 cm, cari nilai x dan nilai y. TP4



11. Cikgu Chee Hong mengarahkan murid Tingkatan 4 Kembara untuk melukis mural pada dinding kantin sekolah yang berbentuk segi empat tepat dengan panjangnya $7x$ m dan lebarnya y m. Dua bentuk yang berbeza perlu dilukis pada dinding seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. *AED* berbentuk semibulatan. Diberi luas dinding itu ialah 28 m^2 dan perimeter *ABCDE* ialah 26 m, cari diameter dan jejari bagi bentuk semibulatan itu. TP5



Penerokaan MATEMATIK

Encik Awang, seorang ahli kimia mempunyai tiga jenis larutan. Setiap hari dia akan membuat beberapa larutan mengikut sukatan yang ditentukan. Pada suatu hari, Encik Awang ingin membuat larutan yang menggunakan tiga jenis larutan. Larutan yang pertama mesti mengandungi 10% asid, larutan kedua mengandungi 40% asid manakala larutan yang ketiga pula mengandungi 60% asid. Encik Awang ingin menyediakan 1 000 liter campuran larutan yang mengandungi 45% asid. Bekalan larutan yang mengandungi 40% asid adalah dua kali bekalan yang mengandungi 10% asid. Bolehkah anda mencadangkan berapakah isi padu setiap larutan yang perlu digunakan oleh Encik Awang?

1. Tuliskan tiga persamaan daripada pernyataan di atas.
2. Tuliskan langkah kerja cadangan anda kepada Encik Awang.

BAB 3

BAB 4
Indeks, Surd dan Logaritma

Apakah yang akan dipelajari?

- Hukum Indeks
- Hukum Surd
- Hukum Logaritma
- Aplikasi Indeks, Surd dan Logaritma

Senarai Standard Pembelajaran

bit.ly/2U5BWfs

KATA KUNCI

- Indeks — *Index*
- Asas — *Base*
- Nombor nisbah — *Rational number*
- Nombor tak nisbah — *Irrational number*
- Surd — *Surd*
- Radikal — *Radical*
- Perpuluhan berulang — *Recurring decimal*
- Surd konjugat — *Conjugate surd*
- Logaritma — *Logarithm*
- Logaritma jati — *Natural logarithm*
- Ungkapan algebra — *Algebraic expression*
- Pekali — *Coefficient*

Keperluan anggaran jumlah penduduk adalah penting untuk perancangan masa hadapan sesebuah negara. Pengetahuan mengenai kadar pertumbuhan penduduk di Malaysia akan menjurus kepada persediaan negara dari pelbagai sudut seperti kemudahan perubatan untuk kanak-kanak, pendaftaran baru untuk pelajar tahun 1 dan sebagainya. Pada pandangan anda, bagaimanakah cara untuk menganggar jumlah penduduk di Malaysia bagi tahun tertentu?

Tahukah Anda?

John Napier ialah seorang ahli matematik Scotland yang terkenal dengan penciptaan logaritma. Logaritma ialah suatu alat matematik yang digunakan untuk memudahkan proses pengiraan terutamanya pendaraban seperti yang diperlukan dalam bidang astronomi.

Untuk maklumat lanjut:

bit.ly/2vsmC2w

SIGNIFIKAN BAB INI

- Separuh hayat bahan radioaktif diberi oleh fungsi $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$ dengan N_0 ialah jisim awal bahan radioaktif, $N(t)$ ialah baki jisim bahan radioaktif selepas reputan, t ialah masa reputan dan λ ialah pemalar reputan. Dengan menggantikan nilai N_0, $N(t)$ dan λ ke dalam fungsi itu, ahli fizik dapat menentukan masa reputan bahan radioaktif.
- Ahli biologi dapat mengukur kadar pertumbuhan bakteria dari masa ke masa jika dibenarkan berkembang.
- Keamatan gempa bumi dapat ditentukan menggunakan fungsi eksponen. Ini membolehkan ahli geosains mengira magnitud pada skala Richter.

Imbas kod *QR* ini untuk menonton video mengenai populasi penduduk Malaysia.

bit.ly/2ZqeAET

4.1 Hukum Indeks

INKUIRI 1 Berpasangan PAK-21

Tujuan: Mengimbas hukum-hukum indeks kembali

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Teliti senarai ungkapan algebra yang disediakan. Gunting semua bentuk dan lekatkan pada jadual untuk membentuk hukum indeks.
3. Tulis satu contoh hukum indeks menggunakan perwakilan ungkapan algebra seperti dalam jadual berikut.

bit.ly/2UHv7pk

Hukum indeks			Contoh
$a^m \times a^n$	$=$	a^{m+n}	$t^2 \times t^3 = t^{2+3} = t^5$

4. Pamerkan hasil kerja anda dan rakan sepasangan anda.
5. Anda dan rakan sepasangan akan bergerak untuk melihat hasil kerja pasangan yang lain.

Mempermudahkan ungkapan algebra yang melibatkan indeks

Anda telah mempelajari bahawa a^n ialah indeks dengan a ialah asas dan n ialah indeks. Bagaimanakah suatu ungkapan algebra yang melibatkan indeks dapat dipermudahkan dengan menggunakan hukum indeks? Mari kita teroka.

INKUIRI 2 Individu

Tujuan: Mempermudahkan ungkapan algebra yang melibatkan indeks

Arahan:

1. Senaraikan hukum indeks yang telah anda pelajari.
2. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
3. Dengan menggunakan hukum indeks yang telah anda senaraikan, permudahkan setiap ungkapan algebra yang diberi.
4. Klik butang "Semak jawapan" untuk menyemak jawapan anda.
5. Bincangkan cara untuk anda memperoleh jawapan dengan rakan yang lain.

ggbm.at/ernfqrga

Hasil daripada Inkuiri 2, dapat dirumuskan bahawa:

Suatu ungkapan algebra yang melibatkan indeks boleh dipermudahkan dengan menggunakan hukum indeks.

Contoh 1

Permudahkan ungkapan algebra yang berikut.

(a) $\dfrac{4^{2n} \times 4^m}{4^n}$

(b) $\dfrac{3^{m+2} - 3^m}{3^m}$

(c) $(5x^{-1})^3 \times 4xy^2 \div (xy)^{-4}$

(d) $4a^3b^2 \times (4ab^3)^{-4}$

Penyelesaian

(a) $\dfrac{4^{2n} \times 4^m}{4^n} = 4^{2n+m-n}$

$= 4^{n+m}$

(b) $\dfrac{3^{m+2} - 3^m}{3^m} = \dfrac{3^m \times 3^2 - 3^m}{3^m}$

$= \dfrac{3^m(3^2 - 1)}{3^m}$

$= 8$

(c) $(5x^{-1})^3 \times 4xy^2 \div (xy)^{-4}$

$= \dfrac{(5x^{-1})^3 \times 4xy^2}{(xy)^{-4}}$

$= 5^3x^{-3} \times 4xy^2 \times (xy)^4$

$= 125 \times 4 \times x^{-3+1+4} \times y^{2+4}$

$= 500x^2y^6$

(d) $4a^3b^2 \times (4ab^3)^{-4}$

$= 4a^3b^2 \times \dfrac{1}{(4ab^3)^4}$

$= \dfrac{4a^3b^2}{256a^4b^{12}}$

$= \dfrac{1}{64ab^{10}}$

Contoh 2

Permudahkan ungkapan algebra yang berikut.

(a) $a^{-\frac{1}{3}} \times 2a^{\frac{-1}{2}}$

(b) $\dfrac{2a^{-2}}{a^{-\frac{3}{2}}}$

(c) $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[2]{a^{-3}}$

(d) $a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{3}{2}} + 2a^{\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}})$

Penyelesaian

(a) $a^{-\frac{1}{3}} \times 2a^{-\frac{1}{2}} = 2 \times a^{-\frac{1}{3}} \times a^{-\frac{1}{2}}$

$= 2a^{-\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$= 2a^{-\frac{5}{6}}$

$= \dfrac{2}{a^{\frac{5}{6}}}$

(b) $\dfrac{2a^{-2}}{a^{-\frac{3}{2}}} = 2a^{-2} \div a^{-\frac{3}{2}}$

$= 2a^{-2-\left(-\frac{3}{2}\right)}$

$= 2a^{-\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{2}{a^{\frac{1}{2}}}$

(c) $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[2]{a^{-3}} = a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{2}}$

$= a^{\frac{2}{3}+\left(-\frac{3}{2}\right)}$

$= a^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}}$

$= a^{-\frac{5}{6}}$

$= \dfrac{1}{a^{\frac{5}{6}}}$

(d) $a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{3}{2}} + 2a^{\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}})$

$= a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} \times 2a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} \times 3a^{-\frac{1}{2}}$

$= a^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} + 2a^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$

$= a^1 + 2a^0 - 3a^{-1}$

$= a + 2 - \dfrac{3}{a}$

Contoh 3

Tunjukkan bahawa

(a) $7^{2x-1} = \dfrac{49^x}{7}$

(b) $3^{x+4} + 3^{x+5} + 3^x$ boleh dibahagi tepat dengan 25 bagi semua integer positif x.

Penyelesaian

(a) $7^{2x-1} = \dfrac{7^{2x}}{7}$

$= \dfrac{49^x}{7}$

(b) $3^{x+4} + 3^{x+5} + 3^x = 3^x(3^4) + 3^x(3^5) + 3^x$

$= 3^x(81 + 243 + 1)$

$= 3^x(325)$

Oleh sebab 325 ialah gandaan bagi 25, maka $3^{x+4} + 3^{x+5} + 3^x$ boleh dibahagi tepat dengan 25 bagi semua integer positif x.

Latih Diri 4.1

1. Permudahkan ungkapan algebra yang berikut.

(a) $\dfrac{5^{3x} \times 5^x}{5^{-x}}$ (b) $\dfrac{7^{b-2} - 7^b}{7^{b+3}}$ (c) $\dfrac{9^{a-3} + 9^{a+4}}{81}$

(d) $c^4d^3 \times c^3d^5$ (e) $(xy^2)^3 \times x^3y^5$ (f) $(7x^{-1})^2 \times (49^{-2}xy)^3$

(g) $(3x^2y)^3 \times (x^3)^4 \div x^{16}y^2$ (h) $(p^2q^{-1})^5 \times q^8$ (i) $(pq^5)^4 \times p^3$

(j) $(49^{-2}xy)^3 \div (7xy)^{-2}$ (k) $20x^{-7}y^2 \div 4x^3y^{-4}$ (l) $6a^7b^{-2} \div 36a^3b^{-4}$

2. Permudahkan ungkapan algebra yang berikut.

(a) $a^{\frac{1}{3}} \times 2a^{-\frac{1}{2}}$ (b) $\dfrac{4a^3}{a^{-\frac{3}{5}}}$

(c) $\sqrt[5]{a^7} \times \sqrt[4]{a^{-9}}$ (d) $a^{-\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} + 3a^{-\frac{3}{2}} - 3a^{-\frac{5}{2}}\right)$

3. Tunjukkan bahawa

(a) $4^{3a-2} = \dfrac{64^a}{16}$ (b) $9^{2a+2} = 81(81^a)$ (c) $7^{3a-4} = \dfrac{343^a}{2\ 401}$

4. Tunjukkan bahawa $4^{x+2} + 4^{x+1} + 4^x$ boleh dibahagi tepat dengan 7 bagi semua integer positif x.

Menyelesaikan masalah yang melibatkan indeks

Persamaan yang melibatkan indeks boleh diselesaikan seperti berikut:

Jika $a^m = a^n$, maka $m = n$ atau jika $a^m = b^m$, maka $a = b$ apabila $a > 0$ dan $a \neq 1$.

Contoh 4

Selesaikan setiap persamaan berikut.

(a) $32^x = \dfrac{1}{8^{x-1}}$

(b) $a^5 = 243$

(c) $27(81^{3x}) = 1$

Penyelesaian

(a) $32^x = \dfrac{1}{8^{x-1}}$

$2^{5x} = 2^{-3(x-1)}$ ← Ungkapkan kedua-dua belah persamaan dalam asas yang sama

$5x = -3x + 3$ ← Bandingkan indeks

$8x = 3$

$x = \dfrac{3}{8}$

(b) $a^5 = 243$

$= 3^5$ ← Ungkapkan dalam bentuk indeks

$a = 3$ ← Bandingkan asas

(c) $27(81^{3x}) = 1$

$3^3(3^4)^{3x} = 3^0$ ← $3^0 = 1$

$3^{3+12x} = 3^0$ ← $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$3 + 12x = 0$

$12x = -3$

$x = -\dfrac{3}{12}$

$= -\dfrac{1}{4}$

POKET MATEMATIK

- Jika $5^x = 5^4$, maka $x = 4$.
- Jika $x^5 = 5^5$, maka $x = 5$.

PANTAS KIRA

Diberi $3^x = \dfrac{9}{3^{2x}}$, cari nilai x.

1. Tekan butang $\boxed{3}$ $\boxed{x^{\square}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{CALC}}$.
2. Tekan butang $\boxed{9}$ $\boxed{\frac{\square}{\square}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{x^{\square}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{)}$.
3. Tekan butang $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{CALC}}$.
4. Tekan butang $\boxed{=}$ untuk mendapatkan nilai x.

BAB 4

Contoh 5

APLIKASI MATEMATIK

Husna mempunyai wang sebanyak RM1 000 000. Dia melaburkan wang itu dalam sebuah institusi pelaburan yang menawarkan pulangan sebanyak 6% setahun. Jumlah pelaburan Husna selepas n tahun dihitung menggunakan persamaan $J = p(1 + k)^n$ dengan p sebagai pelaburan awal tahun dan k sebagai kadar pulangan setahun. Cari jumlah pelaburan Husna selepas 20 tahun.

4.1.2

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Pelaburan awal, p ialah RM1 000 000
- Kadar pulangan, k ialah 6% setahun
- Rumus pelaburan, $J = p(1 + k)^n$
- $n = 20$
- Cari jumlah pelaburan selepas 20 tahun

2. Merancang strategi

Gantikan nilai k, p dan n ke dalam rumus pelaburan.

3. Melaksanakan strategi

$$\begin{aligned} J &= p(1 + k)^n \\ &= 1\,000\,000\left(1 + \frac{6}{100}\right)^{20} \\ &= 1\,000\,000(1 + 0.06)^{20} \\ &= 1\,000\,000(3.207135) \\ &= 3\,207\,135 \end{aligned}$$

Maka, jumlah pelaburan Husna ialah RM3 207 135.

4. Membuat refleksi

Apabila $J = 3\,207\,135$ dan $k = 0.06$, maka

$$\begin{aligned} 3\,207\,135 &= 1\,000\,000(1 + 0.06)^n \\ 3.207135 &= (1.06)^n \\ n &= 20 \end{aligned}$$

Maka, $n = 20$ tahun.

Latih Diri 4.2

1. Selesaikan persamaan berikut.

(a) $4^{x-1} = 8^{x+3}$ (b) $3^{x+3} - 3^{x+2} = 2$ (c) $8^{x-3} = \dfrac{4^{2x}}{64}$

2. Sebiji bola dilepaskan pada suatu ketinggian h cm dari permukaan bumi. Bola itu akan melantun 90% daripada ketinggian asalnya apabila bola menghentam permukaan bumi. Ketinggian bola itu selepas l kali lantunan diberi oleh rumus $h = 10 \times (0.9)^l$. Cari ketinggian bola, dalam cm,

(a) ketika bola itu dilepaskan,

(b) selepas 10 kali lantunan.

Latihan Intensif 4.1

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2OAoYZi untuk kuiz

1. Permudahkan setiap yang berikut.

(a) $\dfrac{y^3(3zx)^2}{9x^3}$ (b) $\dfrac{z^4yx^2}{zxy^2}$ (c) $[(xy)^5 \times 2xy^3]^2$

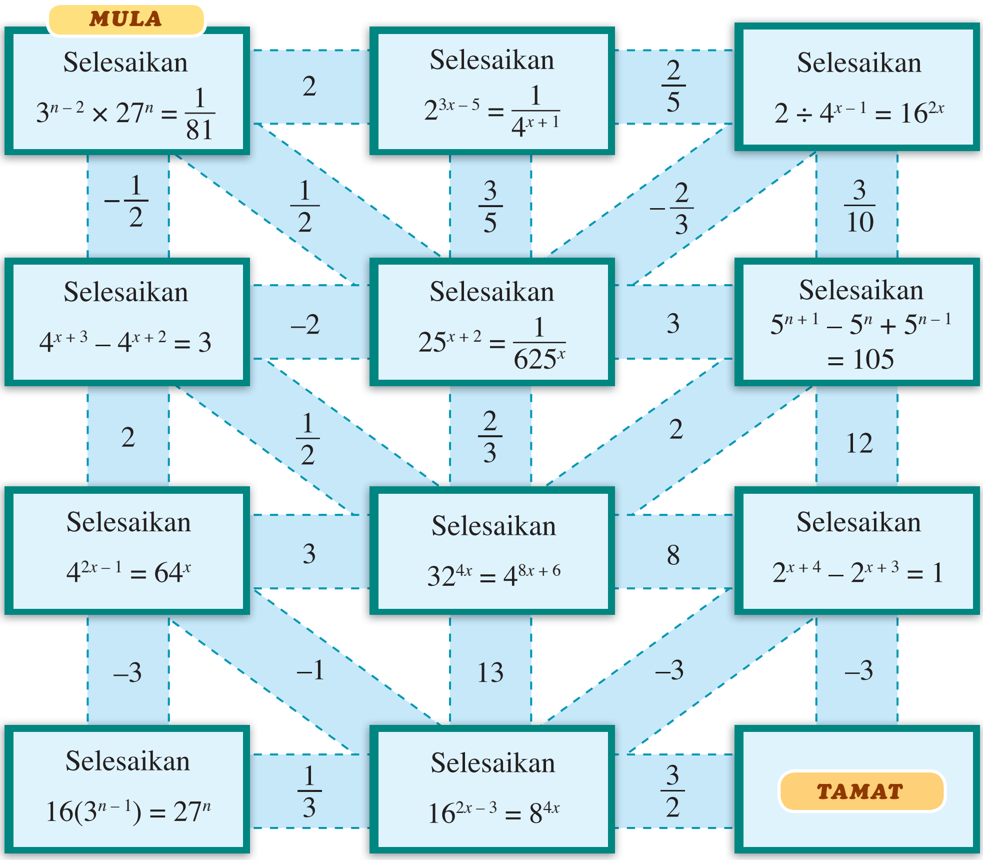
(d) $(ef^2)^3 \div (e^{-2}f^2)$ (e) $4.2x^4y^{14} \div 0.6x^9y^5$ (f) $(7x^{-1})^2 \times (49^{-2}xy)^3 \div (7xy)^{-2}$

2. Jika $2^{x-2} = 2(16)$, cari nilai x.

3. Selesaikan $25^x - 5^{3x-4} = 0$.

4. Selesaikan $4(2^{m+1}) - 16^m = 0$.

5. Cari jalan hingga ke petak TAMAT dengan memilih jawapan yang betul.



6. Dalam satu kajian, sejenis bakteria akan menggandakan bilangannya dalam masa satu minit. Bilangan bakteria pada permulaan kajian ialah 300. Bilangan bakteria selepas t minit diberi oleh $300(3^t)$.
(a) Cari bilangan bakteria selepas 9 minit.
(b) Cari masa, t, dalam minit untuk bilangan bakteria itu menjadi 72 900.

7. Populasi negara M boleh dianggarkan menggunakan model pertumbuhan, $P = A\left(1 + \frac{k}{100}\right)^t$ dengan P ialah populasi yang dijangkakan, A ialah populasi tahun 2017, k ialah kadar pertumbuhan dan t ialah bilangan tahun selepas tahun 2017. Populasi negara tersebut pada tahun 2017 ialah kira-kira 30 juta. Andaikan populasi ini bertambah pada kadar 3% setiap tahun, anggarkan populasi negara tersebut pada tahun 2050.

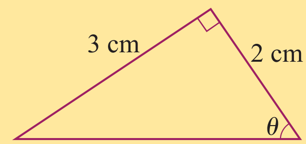
8. Encik Prakesh melaburkan wangnya sebanyak RM20 000 di sebuah bank dengan kadar faedah sebanyak 10% setahun. Jumlah pelaburan Encik Prakesh selepas t tahun boleh ditentukan dengan menggunakan rumus $P = f(1 + r)^t$ dengan f sebagai nilai pelaburan awal dan r sebagai kadar pulangan setahun. Cari jumlah pelaburan Encik Prakesh selepas 10 tahun.

BAB 4

4.2 Hukum Surd

INKUIRI 3 Berkumpulan

Tujuan: Mengenal surd
Arahan:
1. Perhatikan rajah di sebelah.
2. Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai kos θ dan beri jawapan dalam bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$, dengan a dan b ialah integer.
3. Bincangkan hasil dapatan kumpulan anda.



Kita sering berhadapan dengan masalah seperti di atas. Bagaimanakah masalah yang melibatkan surd boleh diselesaikan? Mari kita teroka.

Membanding beza nombor nisbah dan nombor tak nisbah serta menghubungkaitkan surd dengan nombor tak nisbah

Anda telah mempelajari nombor nisbah, iaitu nombor yang boleh diungkapkan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan keadaan a dan b ialah integer dan $b \neq 0$. Nombor nisbah juga boleh ditulis dalam bentuk perpuluhan seperti $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$ Apakah perkaitan antara nombor nisbah dengan nombor tak nisbah?

INKUIRI 4 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Mencari hubung kait antara surd dan nombor tak nisbah
Arahan:
1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Layari Internet untuk mendapatkan maklumat tentang surd.
3. Gunting semua kad nombor yang disediakan dan tampal pada jadual mengikut pengelasan yang betul seperti contoh yang berikut.

bit.ly/2DmtH9b

Nombor nisbah	Nombor tak nisbah	
	Surd	Bukan surd
0.333333...		

4. Tukarkan semua nombor perpuluhan pada kad nombor tersebut kepada pecahan. Apakah kesimpulan yang dapat dibuat?
5. Setiap kumpulan akan bergerak ke kumpulan lain untuk melihat hasil kerja yang dihasilkan.
6. Bincang bersama dengan ahli kumpulan berkenaan hasil kerja kumpulan lain.

Hasil daripada Inkuiri 4, didapati bahawa:

(a) Nombor perpuluhan yang boleh ditukar kepada pecahan ialah **nombor nisbah**.
(b) Nombor perpuluhan yang tidak boleh ditukar kepada pecahan ialah **nombor tak nisbah**.
(c) Nombor dengan simbol radikal, jika nilainya ialah integer atau perpuluhan berulang adalah **bukan surd**.

Surd ialah nombor dalam bentuk punca kuasa, iaitu $\sqrt{a}$, dengan a ialah sebarang integer positif. Surd mempunyai bilangan perpuluhan yang tidak terhingga dan tidak berulang. $\sqrt[n]{a}$ disebut sebagai "surd a peringkat n". Contohnya, $\sqrt[3]{4}$ disebut sebagai "surd 4 peringkat 3". Apabila suatu nombor tidak boleh dipermudah dengan menghapuskan punca kuasa, maka nombor tersebut dikategorikan sebagai surd.

Misalnya,
(a) $\sqrt{2}$ tidak boleh dipermudah, maka $\sqrt{2}$ ialah surd.
(b) $\sqrt{4}$ boleh dipermudah sebagai 2, maka $\sqrt{4}$ bukan surd.

Adakah semua nombor dalam bentuk punca kuasa adalah surd? Perhatikan jadual berikut.

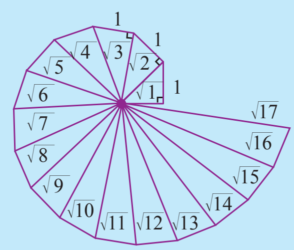
Nombor	Nombor yang dipermudah	Nombor dalam perpuluhan	Surd atau bukan surd
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1.7320508...	Surd
$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{2}$	0.5	Bukan surd
$\sqrt[3]{11}$	$\sqrt[3]{11}$	2.2239800...	Surd
$\sqrt[3]{27}$	3	3	Bukan surd
$\sqrt[5]{3}$	$\sqrt[5]{3}$	1.2457309...	Surd

Daripada jadual di atas, didapati bahawa surd mempunyai nombor perpuluhan yang tidak berulang. Oleh itu, surd ialah suatu nombor tak nisbah. Perpuluhan berulang, contohnya, 54.565656… kadangkala ditulis sebagai $54.\dot{5}\dot{6}$ atau $54.\overline{56}$.

POKET MATEMATIK

- Simbol radikal adalah seperti berikut.
$\sqrt{}, \sqrt[3]{}, \sqrt[5]{}, \sqrt[n]{}$
- Perpuluhan berulang ialah perpuluhan yang boleh ditukar kepada pecahan. Contoh perpuluhan berulang ialah 54.5656…

Muzium Matematik



Dalam geometri, lingkaran Theodorus (juga dipanggil lingkaran kuasa dua, lingkaran Einstein atau lingkaran Pythagoras) yang pertama dibina oleh Theodorus dari Cyrene. Lingkaran ini terdiri daripada segi tiga bersudut tegak yang diletakkan bersebelahan.

BAB 4

4.2.1

Contoh 6

Tukarkan perpuluhan berulang yang berikut kepada pecahan.

(a) 0.676767…

(b) 12.645645645…

Penyelesaian

(a) Katakan,

$$N = 0.676767\ldots \quad \cdots ①$$
$$100N = 67.6767\ldots \quad \cdots ②$$

Darabkan dengan integer yang sesuai supaya bahagian perpuluhan berulang dapat dihapuskan

$$② - ①: 99N = 67$$
$$N = \frac{67}{99}$$

Maka, $0.676767\ldots = \frac{67}{99}$.

(b) Katakan,

$$A = 12.645645645\ldots$$
$$A = 12 + N$$

Anggap, $N = 0.645645645\ldots \quad \cdots ①$

$$1000N = 645.645645\ldots \quad \cdots ②$$
$$② - ①: 999N = 645$$
$$N = \frac{645}{999}$$
$$= \frac{215}{333}$$
$$A = 12 + \frac{215}{333}$$

Maka, $12.645645645\ldots = 12\frac{215}{333}$.

Cabar Minda

Tukarkan pecahan berikut kepada nombor perpuluhan berulang.

$$\frac{224}{495}$$

TIP PINTAR

Adakah $\sqrt[n]{a} = n\sqrt{a}$?

$\sqrt{9} = (9)^{\frac{1}{2}} = 3$

$2\sqrt{9} = 2 \times 9^{\frac{1}{2}}$
$= 2 \times 3$
$= 6$

Oleh sebab $3 \neq 6$, maka $\sqrt[n]{a} \neq n\sqrt{a}$.

Contoh 7

Tentukan sama ada yang berikut adalah surd atau bukan. Beri alasan anda.

(a) $\sqrt[3]{125}$ (b) $\sqrt[5]{125}$ (c) $\sqrt[4]{\frac{16}{64}}$

Penyelesaian

Gunakan kalkulator saintifik untuk mendapatkan nilai.

(a) $\sqrt[3]{125} = 125^{\frac{1}{3}}$
$= 5$

$\sqrt[3]{125}$ bukan surd kerana nilainya ialah integer.

(b) $\sqrt[5]{125} = 2.6265278$

$\sqrt[5]{125}$ ialah surd kerana menghasilkan perpuluhan tidak berulang.

4.2.1

BAB 4

(c) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{64}} = 0.7071067\ldots$

$\sqrt[4]{\dfrac{16}{64}}$ ialah surd kerana menghasilkan perpuluhan tidak berulang.

Contoh 8

Adakah $\sqrt{4} = 2\sqrt{4}$? Jelaskan.

Penyelesaian

$\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}}$
$= 2$

,

$2\sqrt{4} = 2 \times 4^{\frac{1}{2}}$
$= 2 \times 2$
$= 4$

Oleh sebab $2 \neq 4$, maka $\sqrt{4} \neq 2\sqrt{4}$. Secara amnya, $\sqrt[n]{a} \neq n\sqrt{a}$.

TIP PINTAR

$\sqrt[n]{a} \neq n\sqrt{a}$ kerana $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ manakala $n\sqrt{a} = n \times a^{\frac{1}{2}}$.

Latih Diri 4.3

1. Tukarkan perpuluhan berulang berikut kepada pecahan.
(a) 0.787878… (b) 3.57575757… (c) 0.345345345… (d) 13.567567567...

2. Tentukan sama ada yang berikut adalah surd atau bukan. Beri alasan anda.
(a) $\sqrt[3]{127}$ (b) $\sqrt[4]{1\ 125}$ (c) $\sqrt[6]{\dfrac{64}{729}}$ (d) $\sqrt[7]{\dfrac{79}{897}}$

Membuat dan mengesahkan konjektur tentang $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ dan $\sqrt{a} \div \sqrt{b}$

INKUIRI 5 Berkumpulan

Tujuan: Membuat dan mengesahkan konjektur tentang $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ dan $\sqrt{a} \div \sqrt{b}$

Arahan:
1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada petak "Hukum 1" dan "Hukum 2". Kemudian, seret gelongsor *a* dan *b*.
3. Nyatakan konjektur berdasarkan pemerhatian anda tentang kedua-dua hukum tersebut.
4. Dengan menggunakan kalkulator saintifik, lengkapkan jadual yang berikut dengan mengambil sebarang integer positif *a* dan *b*.

ggbm.at/nexprc8p

a	b	$(a \times b)$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	Nilai $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$	$\sqrt{(a \times b)}$	Nilai $\sqrt{(a \times b)}$
2	5	10	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	3.162...	$\sqrt{10}$	3.162...

4.2.1 4.2.2

a	b	$(a \div b)$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	Nilai $\sqrt{a} \div \sqrt{b}$	$\sqrt{(a \div b)}$	Nilai $\sqrt{(a \div b)}$
10	5	2	$\sqrt{10}$	$\sqrt{5}$	1.414...	$\sqrt{2}$	1.414...

5. Bandingkan nilai pada lajur ke-6 dan lajur ke-8 bagi kedua-dua jadual yang telah dilengkapkan.

6. Adakah anda dapat mengesahkan konjektur yang dibuat? Bincangkan.

Hasil daripada Inkuiri 5, didapati bahawa:

Untuk $a > 0$ dan $b > 0$,

(a) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (Hukum 1)

(b) $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (Hukum 2)

POKET MATEMATIK

Jika $a \geqslant 0$, maka $\sqrt{a}$ adalah nombor nyata dan $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a$

Contoh 9

Tulis yang berikut sebagai surd tunggal.

(a) $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$

(b) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{8}}$

(c) $\sqrt{3a} \times \sqrt{5a}$

(d) $\dfrac{\sqrt{21a}}{\sqrt{7a}}$

Penyelesaian

(a) $\sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{2 \times 7}$
$= \sqrt{14}$

(b) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\dfrac{24}{8}}$
$= \sqrt{3}$

(c) $\sqrt{3a} \times \sqrt{5a} = \sqrt{3a \times 5a}$
$= \sqrt{15a^2}$
$= a\sqrt{15}$

(d) $\dfrac{\sqrt{21a}}{\sqrt{7a}} = \sqrt{\dfrac{21a}{7a}}$
$= \sqrt{3}$

Latih Diri 4.4

1. Tulis setiap yang berikut sebagai surd tunggal.

(a) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ (b) $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ (c) $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ (d) $\sqrt{5} \times \sqrt{6}$

(e) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$ (f) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$ (g) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ (h) $\dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

Mempermudahkan ungkapan yang melibatkan surd

INKUIRI 6 Individu

Tujuan: Mempermudahkan ungkapan yang melibatkan surd

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Seret gelongsor untuk mengubah nilai surd.
3. Catatkan surd yang boleh dipermudahkan dan surd yang tidak boleh dipermudahkan.
4. Permudahkan $\sqrt{90}$ tanpa menggunakan alat dan teknologi matematik.

ggbm.at/b9ypcpu7

Hasil daripada Inkuiri 6, didapati bahawa $\sqrt{3}$ tidak boleh dipermudahkan tetapi $\sqrt{9}$ boleh dipermudahkan sebagai 3. Selain itu, $\sqrt{90}$ boleh ditulis sebagai $\sqrt{9 \times 10}$ atau $\sqrt{9} \times \sqrt{10}$, maka $\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

Contoh 10

Tulis $\sqrt{18}$ dalam bentuk $a\sqrt{b}$ dengan a dan b ialah integer dan a ialah nilai yang paling besar.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}\sqrt{18} &= \sqrt{9 \times 2}\\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{2}\\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

9 ialah nombor kuasa dua sempurna terbesar dan faktor bagi 18

Latih Diri 4.5

1. Tandakan (✓) pada pernyataan yang betul.

$\sqrt{5}\sqrt{7}$ $= \sqrt{12}$ ☐	$3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ $= 6\sqrt{2}$ ☐	$\sqrt{260}$ $= 2\sqrt{65}$ ☐	$(\sqrt{16}\sqrt{36})^2$ $= 576$ ☐	$4\sqrt{7} \times 5\sqrt{7}$ $= 20\sqrt{21}$ ☐
$\dfrac{4\sqrt{8}}{2\sqrt{4}}$ $= 2\sqrt{2}$ ☐	$\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$ $= \sqrt{15}$ ☐	$\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ $= 5$ ☐	$\dfrac{30\sqrt{27}}{6\sqrt{3}}$ $= 15$ ☐	$(\sqrt{81})^2$ $= 81$ ☐

2. Tulis yang berikut dalam bentuk $a\sqrt{b}$ dengan a dan b ialah integer dan a ialah nilai yang paling besar.

(a) $\sqrt{12}$ (b) $\sqrt{27}$ (c) $\sqrt{28}$ (d) $\sqrt{32}$

(e) $\sqrt{45}$ (f) $\sqrt{48}$ (g) $\sqrt{54}$ (h) $\sqrt{108}$

Bagaimanakah melaksanakan operasi penambahan, penolakan dan pendaraban yang melibatkan surd? Mari kita teroka dengan lebih lanjut lagi.

INKUIRI 7 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Melaksanakan operasi matematik melibatkan penambahan, penolakan dan pendaraban surd

Arahan:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Pertimbangkan ungkapan yang melibatkan surd.
3. Klik butang "Penyelesaian" untuk melihat langkah pengiraan.
4. Klik "Soalan lain" untuk melihat soalan seterusnya.
5. Buat catatan tentang langkah pengiraan yang ditunjukkan dan terangkan kepada rakan yang lain tentang kefahaman anda terhadap penyelesaian ungkapan yang melibatkan surd.

ggbm.at/e7jfmexs

Hasil daripada Inkuiri 7, didapati bahawa:

Ungkapan yang melibatkan surd boleh dipermudahkan dengan melaksanakan operasi penambahan, penolakan dan pendaraban surd.

Contoh 11

Permudahkan ungkapan yang berikut.

(a) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{6}$

(b) $\sqrt{7}(6 - \sqrt{7})$

(c) $\sqrt{18} - \sqrt{8}$

(d) $(6 + 2\sqrt{2})(1 + 3\sqrt{2})$

Penyelesaian

(a)
$$\begin{aligned}\sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{6} &= \sqrt{2 \times 3} + \sqrt{6}\\ &= \sqrt{6} + \sqrt{6}\\ &= 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\sqrt{7}(6 - \sqrt{7}) &= 6\sqrt{7} - \sqrt{7} \times \sqrt{7}\\ &= 6\sqrt{7} - 7\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}&\sqrt{18} - \sqrt{8}\\ &= \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{4 \times 2}\\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{2} - \sqrt{4} \times \sqrt{2}\\ &= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\\ &= (3 - 2)\sqrt{2}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}&(6 + 2\sqrt{2})(1 + 3\sqrt{2})\\ &= 6(1) + 6(3\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(1) + (2\sqrt{2})(3\sqrt{2})\\ &= 6 + 18\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 12\\ &= 18 + 20\sqrt{2}\end{aligned}$$

Contoh 12

Permudahkan setiap yang berikut dalam bentuk $a\sqrt{b}$.

(a) $4\sqrt{27}$ (b) $7\sqrt{243}$ (c) $5\sqrt{75}$

Penyelesaian

(a) $4\sqrt{27} = 4\sqrt{9 \times 3}$
$= 4(3)\sqrt{3}$
$= 12\sqrt{3}$

(b) $7\sqrt{243} = 7\sqrt{81 \times 3}$
$= 7(9)\sqrt{3}$
$= 63\sqrt{3}$

(c) $5\sqrt{75} = 5\sqrt{25 \times 3}$
$= 5(5)\sqrt{3}$
$= 25\sqrt{3}$

Dalam Contoh 12, perhatikan bahawa $12\sqrt{3}$, $63\sqrt{3}$ dan $25\sqrt{3}$ mempunyai $\sqrt{3}$ sebagai faktor nombor tak nisbah. Maka, ketiga-tiga ungkapan ini dikenali sebagai surd serupa.

Nombor yang tidak mempunyai faktor nombor tak nisbah yang sama dikenali sebagai surd tak serupa. Contohnya set ungkapan $\sqrt{3}$, $2\sqrt[3]{3}$, $5\sqrt{6}$ dan $7\sqrt[4]{3}$ adalah surd tak serupa.

BAB 4

Contoh 13

Tentukan sama ada set ungkapan $4\sqrt{12}$, $5\sqrt{18}$ dan $5\sqrt{6}$ adalah surd serupa atau surd tak serupa.

Penyelesaian

$4\sqrt{12} = 4\sqrt{4 \times 3}$
$= 4(2)\sqrt{3}$
$= 8\sqrt{3}$

$5\sqrt{18} = 5\sqrt{9 \times 2}$
$= 5(3)\sqrt{2}$
$= 15\sqrt{2}$

$5\sqrt{6} = 5\sqrt{2 \times 3}$
$= 5\sqrt{6}$

Ketiga-tiga ungkapan tidak mempunyai faktor nombor tak nisbah yang sama. Maka, ketiga-tiga ungkapan tersebut adalah surd tak serupa.

Latih Diri 4.6

1. Permudahkan ungkapan yang melibatkan surd berikut.

(a) $3\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$ (b) $7\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$ (c) $7\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$
(d) $\sqrt{6}\left(3\sqrt{6} - 5\sqrt{6}\right)$ (e) $\sqrt{5}\left(4 + 5\sqrt{5}\right)$ (f) $\sqrt{7}\left(3 - 5\sqrt{7}\right)$
(g) $\left(4 + 5\sqrt{3}\right)\left(3 + 5\sqrt{3}\right)$ (h) $\left(7 - 5\sqrt{7}\right)\left(3 + 5\sqrt{7}\right)$ (i) $\left(9 + 5\sqrt{4}\right)\left(3 - 5\sqrt{4}\right)$

2. Tentukan sama ada set ungkapan berikut adalah surd serupa atau surd tak serupa.

(a) $5\sqrt{80}$, $2\sqrt{58}$, $9\sqrt{45}$
(b) $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{12}$, $5\sqrt{27}$
(c) $2\sqrt{125}$, $7\sqrt{5}$, $-7\sqrt{5}$
(d) $2\sqrt{12}$, $9\sqrt{24}$, $8\sqrt{5}$
(e) $3\sqrt{27}$, $-3\sqrt{27}$, $-\sqrt{3}$

4.2.3

Menisbahkan penyebut bagi ungkapan yang melibatkan surd

Nombor yang mempunyai penyebut nombor tak nisbah seperti $\dfrac{1}{m\sqrt{a}}$, $\dfrac{1}{m\sqrt{a}+n\sqrt{b}}$ dan $\dfrac{1}{m\sqrt{a}-n\sqrt{b}}$, dengan m dan n ialah integer hendaklah ditulis dengan menisbahkan penyebutnya. Peraturan menisbahkan penyebut adalah seperti berikut:

(a) Darabkan pengangka dan penyebut bagi $\dfrac{1}{m\sqrt{a}}$ dengan surd konjugat $m\sqrt{a}$ supaya surd dihapuskan daripada penyebutnya.

(b) Darabkan pengangka dan penyebut bagi $\dfrac{1}{m\sqrt{a}+n\sqrt{b}}$ dengan surd konjugat $m\sqrt{a}-n\sqrt{b}$ supaya surd dihapuskan daripada penyebutnya.

(c) Darabkan pengangka dan penyebut bagi $\dfrac{1}{m\sqrt{a}-n\sqrt{b}}$ dengan surd konjugat $m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$ supaya surd dihapuskan daripada penyebutnya.

Contoh 14

Nisbahkan penyebut dan permudahkan setiap yang berikut.

(a) $\dfrac{1}{5\sqrt{3}}$ (b) $\dfrac{1}{7\sqrt{2}+5\sqrt{3}}$ (c) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-5\sqrt{7}}$

Penyelesaian

(a) $\dfrac{1}{5\sqrt{3}} = \dfrac{1}{5\sqrt{3}} \times \dfrac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}$ ← Darabkan dengan surd konjugat

$= \dfrac{5\sqrt{3}}{5 \times 5 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

$= \dfrac{5\sqrt{3}}{75}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{15}$

(b) $\dfrac{1}{7\sqrt{2}+5\sqrt{3}} = \dfrac{1}{7\sqrt{2}+5\sqrt{3}} \times \dfrac{7\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{7\sqrt{2}-5\sqrt{3}}$ ← Darabkan dengan surd konjugat

$= \dfrac{7\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})(7\sqrt{2}-5\sqrt{3})}$

$= \dfrac{7\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{(7\sqrt{2})^2-(5\sqrt{3})^2}$

$= \dfrac{7\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{23}$

POKET MATEMATIK

Penisbahan menggunakan surd konjugat.

Surd	Surd konjugat
$m\sqrt{a}$	$m\sqrt{a}$
$m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$	$m\sqrt{a}-n\sqrt{b}$
$m\sqrt{a}-n\sqrt{b}$	$m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$

TIP PINTAR

$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$

$(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b}) = a^2 - b$

(c) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-5\sqrt{7}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}-5\sqrt{7}} \times \dfrac{2\sqrt{3}+5\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+5\sqrt{7}}$ ← Darabkan dengan surd konjugat

$= \dfrac{2\sqrt{3}+5\sqrt{7}}{(2\sqrt{3}-5\sqrt{7})(2\sqrt{3}+5\sqrt{7})}$

$= \dfrac{2\sqrt{3}+5\sqrt{7}}{(2\sqrt{3})^2-(5\sqrt{7})^2}$

$= -\dfrac{2\sqrt{3}+5\sqrt{7}}{163}$

Surd konjugat bagi $2\sqrt{3}-5\sqrt{7}$ ialah $2\sqrt{3}+5\sqrt{7}$.

Contoh 15

Nisbahkan penyebut dan permudahkan $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$.

Penyelesaian

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \times \dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ ← Darabkan dengan surd konjugat

$= \dfrac{1+3+\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-3}$

$= \dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2}$

$= -2-\sqrt{3}$

Cabar Minda

Apakah surd konjugat bagi $1-\sqrt{3}$?

Contoh 16

Tuliskan $\dfrac{5+\sqrt{7}}{1+\sqrt{3}} + \dfrac{4-\sqrt{7}}{1-\sqrt{3}}$ sebagai pecahan tunggal.

Penyelesaian

$\dfrac{5+\sqrt{7}}{1+\sqrt{3}} + \dfrac{4-\sqrt{7}}{1-\sqrt{3}} = \left(\dfrac{5+\sqrt{7}}{1+\sqrt{3}} \times \dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) + \left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{1-\sqrt{3}} \times \dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$

$= \dfrac{5-5\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{21}+4+4\sqrt{3}-\sqrt{7}-\sqrt{21}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}$

$= \dfrac{9-\sqrt{3}-2\sqrt{21}}{1-3}$

$= \dfrac{-9+\sqrt{3}+2\sqrt{21}}{2}$

TIP PINTAR

Darabkan $\dfrac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$ dengan pecahan berbentuk $\dfrac{c}{a+\sqrt{b}}$ untuk menghapuskan surd daripada penyebutnya.

SUMBANG SARAN

"Hasil darab dua nombor tak nisbah akan menghasilkan nombor tak nisbah."

Bincangkan dan beri justifikasi anda tentang pernyataan ini.

BAB 4

4.2.4

Latih Diri 4.7

1. Nisbahkan penyebut dan permudahkan setiap yang berikut.

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (b) $\dfrac{7}{\sqrt{2}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

(d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{12}}$ (e) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ (f) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{5-\sqrt{5}}$

(g) $\dfrac{6-\sqrt{3}}{9-\sqrt{12}}$ (h) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}+\dfrac{4-\sqrt{3}}{7+\sqrt{3}}$ (i) $\dfrac{7-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}-\dfrac{6+\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$

Menyelesaikan masalah yang melibatkan surd

Contoh 17

APLIKASI MATEMATIK

Rajah di sebelah menunjukkan sebuah rumah berbentuk piramid. Bahagian hadapan rumah itu yang berbentuk segi tiga mempunyai keluasan $(20\sqrt{3}-4)$ m^2 dengan panjang tapaknya ialah $(4+4\sqrt{3})$ m. Cari tinggi bahagian hadapan rumah yang berbentuk segi tiga itu dalam bentuk $(a+b\sqrt{3})$, dengan a dan b ialah nombor nisbah.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Luas bahagian berbentuk segi tiga $=(20\sqrt{3}-4)$ m^2
- Panjang tapak segi tiga $=(4+4\sqrt{3})$ m
- Cari tinggi segi tiga dalam bentuk $(a+b\sqrt{3})$

2. Merancang strategi

- Gunakan rumus luas segi tiga $=\dfrac{1}{2}\times$ tapak $\times$ tinggi

3. Melaksanakan strategi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\times(4+4\sqrt{3})\times t &= 20\sqrt{3}-4\\
(2+2\sqrt{3})t &= 20\sqrt{3}-4\\
t &= \frac{20\sqrt{3}-4}{2+2\sqrt{3}}\\
&= \frac{20\sqrt{3}-4}{2+2\sqrt{3}}\times\frac{2-2\sqrt{3}}{2-2\sqrt{3}}\\
&= \frac{40\sqrt{3}-120-8+8\sqrt{3}}{-8}\\
&= \frac{-128+48\sqrt{3}}{-8}\\
&= 16-6\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Tinggi bahagian rumah berbentuk segi tiga ialah $(16-6\sqrt{3})$ m.

4.2.4 4.2.5

4. Membuat refleksi

$$\begin{aligned}\text{Luas segi tiga} &= \frac{1}{2} \times \left(4 + 4\sqrt{3}\right) \times \left(16 - 6\sqrt{3}\right)\\ &= \left(2 + 2\sqrt{3}\right)\left(16 - 6\sqrt{3}\right)\\ &= 32 - 12\sqrt{3} + 32\sqrt{3} - 36\\ &= \left(20\sqrt{3} - 4\right)\text{ m}^2\end{aligned}$$

Contoh 18

Selesaikan $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$.

Penyelesaian

$$x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$$

$$\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} - 1\right) = 0 \longleftarrow \text{Faktorkan}$$

$\sqrt{x} - 3 = 0$ atau $\sqrt{x} - 1 = 0$

$\sqrt{x} = 3$ $\qquad$ $\sqrt{x} = 1$

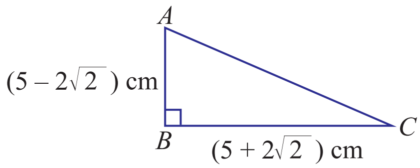
$\left(\sqrt{x}\right)^2 = 3^2$ $\qquad$ $\left(\sqrt{x}\right)^2 = 1^2$

$x = 9$ $\qquad$ $x = 1$

Latih Diri 4.8

1. Sebuah segi tiga ABC mempunyai sudut $ABC = 60°$, $AB = 3\sqrt{3}$ cm dan $BC = 4\sqrt{3}$ cm. Cari panjang AC.

2. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga bersudut tegak ABC.
(a) Cari luas segi tiga ABC.
(b) Cari panjang AC.



3. Selesaikan persamaan $2 + 3\sqrt{y} = 6\sqrt{3} + 5$. Tulis jawapan anda dalam bentuk $a + b\sqrt{3}$, dengan a dan b ialah nombor nisbah.

4. Selesaikan persamaan yang berikut.
(a) $\sqrt{2 - 7x} + 2x = 0$
(b) $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{2x - 1} = 2$
(c) $\sqrt{4x + 3} - \sqrt{4x - 1} = 2$

4.2.5

BAB 4

Latihan Intensif 4.2

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2GSsZST untuk kuiz

1. Tuliskan yang berikut sebagai surd tunggal.

(a) $\sqrt{5} \times \sqrt{11}$ (b) $\sqrt{7} \times \sqrt{10}$ (c) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{18}}$ (d) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{8}}$

2. Tuliskan yang berikut dalam bentuk $a\sqrt{b}$, dengan a dan b ialah integer dan a ialah nilai yang paling besar.

(a) $\sqrt{24}$ (b) $\sqrt{162}$ (c) $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}$ (d) $\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2$

3. Permudahkan.

(a) $3\sqrt{10} + 5\sqrt{10}$ (b) $6\sqrt{11} - \sqrt{11}$ (c) $13\sqrt{13} - 2\sqrt{13}$
(d) $2\sqrt{45} + \sqrt{20}$ (e) $3\sqrt{27} - \sqrt{72}$ (f) $\sqrt{18} + \sqrt{27}$
(g) $3\sqrt{15} \times 7\sqrt{5}$ (h) $\sqrt{72} \times 4\sqrt{15}$ (i) $\sqrt{4}\left(2\sqrt{3}\right) - 5\sqrt{3}$
(j) $\sqrt{7}\left(3 + 7\sqrt{7}\right)$ (k) $\sqrt{5}\left(7 - 5\sqrt{5}\right)$ (l) $\left(3 + 3\sqrt{7}\right)\left(3 + 5\sqrt{7}\right)$
(m) $\left(7 + 5\sqrt{7}\right)\left(3 - 5\sqrt{7}\right)$ (n) $\left(7 - 5\sqrt{5}\right)\left(3 - 5\sqrt{5}\right)$ (o) $\dfrac{\sqrt{112}}{\sqrt{7}}$
(p) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{108}}$ (q) $\dfrac{\sqrt{88}}{2\sqrt{11}}$ (r) $\dfrac{9\sqrt{20}}{3\sqrt{5}}$

4. Diberi $A = 3\sqrt{5} + 7\sqrt{3}$, $B = 2\sqrt{5} - 7\sqrt{7}$ dan $C = 2\sqrt{3} - 9\sqrt{8}$. Permudahkan

(a) $A + B$ (b) $A - C$ (c) $3A + 2B$ (d) $3A + B - 2C$

5. Nisbahkan penyebut dan permudahkan ungkapan yang berikut.

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (b) $\dfrac{4}{3 - \sqrt{5}}$ (c) $\dfrac{4}{3 - 3\sqrt{5}}$
(d) $\dfrac{5}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ (e) $\dfrac{4 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$ (f) $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$

6. Tuliskan yang berikut sebagai pecahan tunggal.

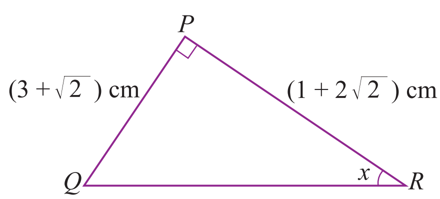
(a) $\dfrac{1}{1 + \sqrt{3}} + \dfrac{1}{1 - \sqrt{3}}$ (b) $\dfrac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$ (c) $\dfrac{2}{4 - \sqrt{3}} + \dfrac{1}{4 + \sqrt{3}}$

7. Luas sebuah segi empat ialah $(8 + \sqrt{10})$ cm^2. Satu daripada sisinya mempunyai panjang $\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$ cm. Cari panjang sisi yang satu lagi dalam bentuk $a\sqrt{5} + b\sqrt{2}$.

8. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga bersudut tegak PQR.

(a) Cari nilai bagi tan x. Tulis jawapan anda dalam bentuk $\dfrac{a + b\sqrt{2}}{c}$, dengan a, b dan c ialah integer.

(b) Cari luas segi tiga PQR. Tulis jawapan anda dalam bentuk $\dfrac{p + q\sqrt{2}}{r}$, dengan p, q dan r ialah integer.



4.3 Hukum Logaritma

Menghubungkaitkan persamaan dalam bentuk indeks dengan bentuk logaritma dan menentukan nilai logaritma sesuatu nombor

Suatu persamaan dalam bentuk indeks boleh ditulis sebagai $N = a^x$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$. N, a dan x ialah pemboleh ubah. Kita boleh mencari nilai satu pemboleh ubah jika nilai bagi dua pemboleh ubah yang lain diberi. Misalnya,

(a) jika $81 = 9^x$, maka $x = 2$

(b) jika $1\ 000 = a^3$, maka $a = \sqrt[3]{1\ 000}$
$= 10$

(c) jika $N = 5^3$, maka $N = 125$

Jika $a^m = a^n$ maka, $m = n$
Jika $a^m = b^m$ maka, $a = b$

Bolehkah anda mencari nilai x bagi persamaan-persamaan berikut?

(a) $50 = 4^x$

(b) $69 = 7^x$

(c) $80 = 8^x$

Apakah kaedah yang boleh digunakan? Mari kita teroka dengan lebih lanjut. Inkuiri 8 akan menjelaskan cara penyelesaian persamaan di atas.

INKUIRI 8 Berkumpulan

Tujuan: Menghubungkaitkan persamaan dalam bentuk indeks dan bentuk logaritma

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada petak "Graf persamaan bentuk indeks" dan perhatikan graf bagi fungsi $f(x) = a^x$ yang terbentuk.
3. Kemudian, klik pada petak "Graf persamaan bentuk logaritma" dan perhatikan graf bagi fungsi $g(x) = \log_a(x)$ yang terbentuk.
4. Seret gelongsor a ke kiri dan ke kanan. Catatkan pemerhatian anda tentang perubahan yang berlaku pada graf apabila nilai a berubah.
5. Seret gelongsor a pada nilai 1. Adakah wujud graf bagi $g(x) = \log_a x$? Apakah bentuk graf bagi $f(x) = a^x$ yang terhasil? Catatkan hasil dapatan anda.
6. Seret gelongsor a pada nilai negatif. Adakah wujud graf $f(x) = a^x$ dan $g(x) = \log_a x$? Catatkan hasil dapatan anda.
7. Bincangkan kewujudan logaritma bagi nombor negatif dan sifar.
8. Kemudian, sahkan sama ada pernyataan yang berikut adalah benar atau palsu.
   (a) $\log_a 1 = 0$ (b) $\log_a a = 1$

ggbm.at/pu5afgws

BAB 4

4.3.1

Hasil daripada Inkuiri 8, didapati bahawa perkaitan antara persamaan dalam bentuk indeks dan logaritma boleh ditakrifkan seperti berikut:

$$\log_a N = x \Leftrightarrow N = a^x \text{ dengan } a > 0 \text{ dan } a \neq 1$$

Daripada takrifan di atas, dapat disimpulkan bahawa:

$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$ dan $a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$

Maka, untuk sebarang nombor nyata, $a > 0$ dan $a \neq 1$, pernyataan berikut adalah benar.

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$

Perhatikan bahawa:

$$\log_a N \text{ tertakrif jika } N > 0 \text{ dan } a > 0, a \neq 1$$

Contohnya, $\log_7 0$, $\log_{10} (-10)$, $\log_0 2$ dan $\log_1 13$ tidak tertakrif.

Asas bagi logaritma mestilah bernilai positif. Biasanya, 1 tidak digunakan sebagai asas kerana $1^n = 1$ bagi sebarang nilai n.

Jika diberi nilai logaritma biasa bagi suatu nombor, nombor itu boleh dicari dengan menggunakan kalkulator saintifik. Nombor itu dinamakan sebagai **antilogaritma** atau ringkasnya **antilog**.

$$\text{Jika } \log_{10} N = x, \text{ maka antilog } x = N$$

Berdasarkan takrif logaritma bagi suatu nombor, kita boleh menukarkan satu persamaan indeks kepada bentuk logaritma.

Indeks nombor kuasa merupakan nilai logaritma

Diberi $16 = 2^4$ maka $\log_2 16 = 4$

Asas nombor kuasa adalah asas logaritma

Sebaliknya, kita juga boleh menukar satu persamaan dalam bentuk logaritma kepada bentuk indeks.

$$\text{Jika } \log_2 16 = 4, \text{ maka } 16 = 2^4$$

TIP PINTAR

$\log_a a^x = x$

POKET MATEMATIK

Bentuk indeks	Bentuk logaritma
$4^0 = 1$	$\log_4 1 = 0$
$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$7^1 = 7$	$\log_7 7 = 1$
$10^1 = 10$	$\log_{10} 10 = 1$

POKET MATEMATIK

Logaritma biasa ialah logaritma dengan asas 10. Contohnya, $\log_{10} a = \lg a$

Muzium Matematik

Nilai logaritma biasa boleh ditentukan dengan menggunakan kalkulator saintifik atau buku sifir empat angka.

Imbas kod *QR* di bawah untuk mendapatkan buku sifir 4 angka.

bit.ly/2CZi1Jt

INKUIRI 9 Berpasangan PAK-21

Tujuan: Menghubungkaitkan graf fungsi eksponen dan fungsi logaritma

Arahan:

1. Salin dan lengkapkan jadual di bawah bagi $y = 2^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$						

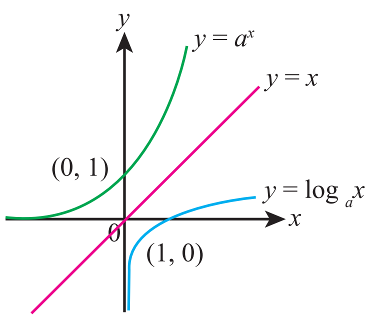
2. Kemudian, salin dan lengkapkan jadual di bawah bagi fungsi songsangan bagi $y = 2^x$, iaitu dengan menukarkan nilai x kepada nilai y dan sebaliknya.

x	$\frac{1}{8}$						
y	-3						

3. Lukiskan graf y melawan x bagi $y = 2^x$ dan fungsi songsangannya pada paksi yang sama.
4. Catatkan pemerhatian anda tentang kedua-dua graf yang dilukis.
5. Bentangkan hasil dapatan anda di hadapan kelas.

Hasil daripada Inkuiri 9, $f : x \to 2^x$, $x = f^{-1}(2^x)$.

Katakan $y = 2^x$,
maka $x = f^{-1}(y)$
$\log_2 y = \log_2 2^x$
$\log_2 y = x$
Gantikan $x = \log_2 y$ dalam $x = f^{-1}(y)$
maka, $f^{-1}(y) = \log_2 y$
atau $f^{-1}(x) = \log_2 x$



Umumnya,

Jika $f : x \to a^x$, maka $f^{-1} : x \to \log_a x$

Oleh itu,

$y = \log_a x$ ialah songsangan bagi $a^y = x$

Contoh 19

Tukarkan $2^4 = 16$ kepada bentuk logaritma.

Penyelesaian

$2^4 = 16$
$\log_2 16 = 4$

4.3.1

Contoh 20

Tukarkan $\log_3 27 = 3$ kepada bentuk indeks.

Penyelesaian

$\log_3 27 = 3$
$3^3 = 27$

Contoh 21

Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\log_{10} 7$ (b) $\log_{10} 79$ (c) $\log_{10} \left(\frac{3}{4}\right)^3$

Penyelesaian

(a) $\log_{10} 7 = 0.8451$

(b) $\log_{10} 79 = 1.8976$

(c) $\log_{10} \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \log_{10} \left(\frac{27}{64}\right)$
$= -0.3748$

Contoh 22

Cari nilai setiap yang berikut.

(a) $\log_5 625$ (b) $\log_6 7\,776$

Penyelesaian

(a) Katakan, $\log_5 625 = x$
$5^x = 625$
$5^x = 5^4$
$x = 4$
Maka, $\log_5 625 = 4$

(b) Katakan, $\log_6 7\,776 = y$
$6^y = 7\,776$
$6^y = 6^5$
$y = 5$
Maka, $\log_6 7\,776 = 5$

Contoh 23

(a) Cari nilai x jika $\log_5 x = 3$.
(b) Cari nilai y jika $\log_3 y = 4$.

Penyelesaian

(a) $\log_5 x = 3$
$x = 5^3$
$x = 125$

(b) $\log_3 y = 4$
$y = 3^4$
$y = 81$

BAB 4

4.3.1

Contoh 24

Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) antilog 0.1456

(b) antilog (–0.3976)

Penyelesaian

(a) antilog 0.1456 = 1.3983

(b) antilog (–0.3976) = 0.4003

Latih Diri 4.9

1. Tukarkan yang berikut kepada bentuk logaritma.

(a) $3^4 = 81$ (b) $2^7 = 128$ (c) $5^3 = 125$ (d) $6^3 = 216$

2. Tukarkan yang berikut kepada bentuk indeks.

(a) $\log_{10} 10\,000 = 4$ (b) $\log_{10} 0.0001 = -4$

(c) $\log_2 128 = 7$ (d) $\log_4 64 = 3$

3. Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\log_{10} 9$ (b) $\log_{10} 99$

(c) $\log_{10} \left(\frac{5}{6}\right)^3$ (d) $\log_2 64$

(e) $\log_3 81$ (f) $\log_4 256$

(g) $\log_{10} 100\,000$

4. Selesaikan persamaan berikut.

(a) $\log_2 x = 5$ (b) $\log_8 x = 3$ (c) $\log_2 x = 8$

5. Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) antilog 2.1423 (b) antilog 1.3923

(c) antilog 3.7457 (d) antilog (–3.3923)

(e) antilog (–2.5676) (f) antilog (–4.5555)

Membuktikan hukum logaritma

INKUIRI 10 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Membuktikan hukum logaritma

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Perhatikan contoh tiga hukum logaritma yang dipaparkan.
3. Seret gelongsor *a*, *b* dan *n*. Perhatikan perubahan yang berlaku pada ketiga-tiga hukum logaritma.
4. Bincangkan ketiga-tiga hukum logaritma tersebut dan buat satu kesimpulan.
5. Lakukan pembentangan ringkas mengenai dapatan anda.

ggbm.at/cpkxqmbj

4.3.1 4.3.2

BAB 4

Hasil daripada Inkuiri 10, tiga hukum asas bagi logaritma adalah seperti berikut:

Jika a, x dan y ialah positif dan $a \neq 1$, maka

(a) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (Hukum hasil darab)

(b) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (Hukum hasil bahagi)

(c) $\log_a x^n = n \log_a x$ untuk sebarang nombor nyata n (Hukum kuasa)

Setiap hukum asas logaritma di atas boleh dibuktikan seperti berikut:
Andaikan $x = a^p$ dan $y = a^q$, maka $p = \log_a x$ dan $q = \log_a y$.

(a) $xy = a^p \times a^q = a^{p+q}$

Maka, $\log_a xy = p + q$ ← Daripada takrifan logaritma

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ← Gantikan $p = \log_a x$ dan $q = \log_a y$

(b) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

Maka, $\log_a \dfrac{x}{y} = p - q$ ← Daripada takrifan logaritma

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ← Gantikan $p = \log_a x$ dan $q = \log_a y$

(c) $x^n = (a^p)^n = a^{pn}$

Maka, $\log_a x^n = pn$ ← Daripada takrifan logaritma

$\log_a x^n = n \log_a x$ ← Gantikan $p = \log_a x$

Contoh 25

Diberi $\log_5 15 = 1.6826$ dan $\log_5 4 = 0.8614$. Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\log_5 60$ (b) $\log_5 12$ (c) $\log_5 100$

Penyelesaian

(a) $\log_5 60 = \log_5 (15 \times 4)$
$= \log_5 15 + \log_5 4$
$= 1.6826 + 0.8614$
$= 2.544$

(b) $\log_5 12 = \log_5 \left(\dfrac{60}{5}\right)$
$= \log_5 60 - \log_5 5$ ← $\log_a a^x = x$
$= 2.544 - 1$
$= 1.544$

(c) $\log_5 100 = \log_5 (25 \times 4)$
$= \log_5 25 + \log_5 4$
$= \log_5 5^2 + \log_5 4$
$= 2 \log_5 5 + 0.8614$
$= 2 + 0.8614$
$= 2.861$

Celik Teknologi

Semak jawapan anda dengan menggunakan aplikasi *Photomath*. Imbas kod *QR* di bawah untuk memuat turun aplikasi *Photomath*.

bit.ly/2Rg86YH

4.3.2

Contoh 26

Cari nilai bagi setiap yang berikut tanpa menggunakan kalkulator.

(a) $\log_5 750 - \log_5 6$ (b) $\log_3 8 + 2\log_3 6 - \log_3 \frac{96}{9}$

Penyelesaian

(a) $\log_5 750 - \log_5 6 = \log_5 \frac{750}{6}$
$= \log_5 125$
$= \log_5 5^3$
$= 3\log_5 5$ $\log_a a^x = x$
$= 3$

(b) $\log_3 8 + 2\log_3 6 - \log_3 \frac{96}{9} = \log_3 8 + \log_3 6^2 - \log_3 \frac{96}{9}$
$= \log_3 \left(8 \times 36 \div \frac{96}{9}\right)$
$= \log_3 27$
$= \log_3 3^3$
$= 3\log_3 3$ $\log_a a^x = x$
$= 3$

Latih Diri 4.10

1. Diberi bahawa $\log_7 4 = 0.712$ dan $\log_7 5 = 0.827$. Nilaikan setiap yang berikut.

(a) $\log_7 1\frac{1}{4}$ (b) $\log_7 28$ (c) $\log_7 100$ (d) $\log_7 0.25$

2. Nilaikan setiap yang berikut tanpa menggunakan kalkulator.

(a) $\log_3 21 + \log_3 18 - \log_3 14$

(b) $2\log_4 2 - \frac{1}{2}\log_4 9 + \log_4 12$

(c) $\log_2 7 + \log_2 12 - \log_2 21$

Mempermudah ungkapan algebra menggunakan hukum logaritma

Ungkapan algebra yang melibatkan logaritma boleh dipermudah dengan menggunakan hukum logaritma.

Contoh 27

Ungkapkan setiap yang berikut sebagai satu logaritma tunggal.

(a) $\log_a x + 3\log_a y$ (b) $2\log_a x - \frac{1}{2}\log_a y$ (c) $2\log_3 x + \log_3 y - 1$

Penyelesaian

(a) $\log_a x + 3\log_a y = \log_a x + \log_a y^3$
$= \log_a xy^3$

4.3.2 4.3.3

BAB 4

(b) $2\log_a x - \frac{1}{2}\log_a y = \log_a x^2 - \log_a y^{\frac{1}{2}}$

$= \log_a \frac{x^2}{\sqrt{y}}$

(c) $2\log_3 x + \log_3 y - 1 = \log_3 x^2 + \log_3 y - \log_3 3$

$= \log_3 \frac{x^2 y}{3}$

Contoh 28

Jika $p = \log_b 2$, $q = \log_b 3$ dan $r = \log_b 5$, tuliskan yang berikut dalam sebutan p, q dan/atau r.

(a) $\log_b 6$

(b) $\log_b 45$

(c) $\log_b 0.2222\ldots$

(d) $\log_b \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

Penyelesaian

(a) $\log_b 6 = \log_b (2 \times 3)$

$= \log_b 2 + \log_b 3$

$= p + q$

(b) $\log_b 45 = \log_b (9 \times 5)$

$= \log_b 3^2 + \log_b 5$

$= 2\log_b 3 + \log_b 5$

$= 2q + r$

(c) $\log_b 0.2222\ldots = \log_b \frac{2}{9}$

$= \log_b 2 - \log_b 9$

$= \log_b 2 - \log_b 3^2$

$= \log_b 2 - 2\log_b 3$

$= p - 2q$

(d) $\log_b \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right) = \log_b 5 + \log_b \sqrt{3} - \log_b 2$

$= \log_b 5 + \frac{1}{2}\log_b 3 - \log_b 2$

$= r + \frac{1}{2}q - p$

Cabar Minda

Bolehkah anda mencari nilai bagi

(a) $\log_{10}(-6)$?

(b) $\log_{-10} 6$?

IMBAS KEMBALI

Katakan,

$A = 0.2222\ldots$ ①

$100A = 22.22\ldots$ ②

② − ① : $99A = 22$

$A = \frac{22}{99}$

$= \frac{2}{9}$

Latih Diri 4.11

1. Tuliskan ungkapan berikut sebagai logaritma tunggal.

(a) $\log_2 x + \log_2 y^2$

(b) $\log_b x - 3\log_b y$

(c) $\log_2 x + 3\log_2 y$

(d) $\frac{1}{2}\log_4 x + 2 - 3\log_4 y$

(e) $\log_3 m^4 + 2\log_3 n - \log_3 m$

2. Jika diberi $\log_2 3 = p$ dan $\log_2 5 = q$, ungkapkan setiap yang berikut dalam sebutan p dan q.

(a) $\log_2 10$

(b) $\log_2 45$

(c) $\log_2 \sqrt{15}$

Membuktikan hubungan $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ dan menentukan logaritma suatu nombor

Jika a, b dan c ialah nombor positif, $a \neq 1$ dan $c \neq 1$,
maka $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

QR

Penukaran asas logaritma.

bit.ly/2Co1w9z

Pembuktian bagi pernyataan di atas adalah seperti berikut:
Andaikan $\log_a b = x$, maka, $a^x = b$.

$$\log_c a^x = \log_c b$$

Ambil logaritma asas c pada kedua-dua belah persamaan

$$x \log_c a = \log_c b$$

Hukum kuasa logaritma

$$x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Maka, $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Secara khususnya:

Jika $b = c$, maka $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$

Dengan menggunakan hukum penukaran asas, sebarang asas logaritma boleh ditulis dan dinilai menggunakan asas 10 atau asas e.

Logaritma **asas e** dikenali sebagai **logaritma jati** dan ditulis sebagai $\log_e$ atau ln. Asas e sering digunakan dalam bidang matematik, sains dan teknologi.

POKET MATEMATIK

ln a bermaksud $\log_e a$ dengan e ialah pemalar eksponen. Nombor e mempunyai perpuluhan yang tidak berulang, iaitu 2.7182…

Perhatikan yang berikut:
- $\log 10 = 1$
- $\ln e = 1$
- $\ln e^x = x$
- $e^{\ln x} = x$
- $10^{\log x} = x$

Contoh 29

Cari nilai yang berikut dengan menukarkan asasnya kepada 10.

(a) $\log_{30} 4$ (b) $\log_2 0.45$

Penyelesaian

(a) $\log_{30} 4 = \dfrac{\log_{10} 4}{\log_{10} 30}$
$= \dfrac{0.6021}{1.4771}$
$= 0.408$

(b) $\log_2 0.45 = \dfrac{\log_{10} 0.45}{\log_{10} 2}$
$= \dfrac{-0.3468}{0.3010}$
$= -1.152$

Cabar Minda

Cari nilai $\log_5 20$ menggunakan logaritma biasa dan logaritma jati.

4.3.4

Contoh 30

Tukarkan setiap yang berikut kepada logaritma jati dan nilaikan.

(a) $\log_6 254$ (b) $\log_{30} 4$

Penyelesaian

(a) $\log_6 254 = \dfrac{\log_e 254}{\log_e 6}$

$= \dfrac{\ln 254}{\ln 6}$

$= \dfrac{5.5373}{1.7918}$

$= 3.090$

(b) $\log_{30} 4 = \dfrac{\log_e 4}{\log_e 30}$

$= \dfrac{\ln 4}{\ln 30}$

$= \dfrac{1.3863}{3.4012}$

$= 0.408$

PANTAS KIRA

Menentukan penyelesaian Contoh 30 dengan menggunakan kalkulator saintifik.

1. Tekan $\boxed{\text{ln}}\ \boxed{254}\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ \boxed{\text{ln}}\ \boxed{6}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

2. Skrin akan memaparkan:

ln(254) ÷ ln(6)

3.090445097

Contoh 31

Diberi $\log_5 x = p$, ungkapkan setiap yang berikut dalam sebutan p.

(a) $\log_{25} x$ (b) $\log_x 25x^3$

Penyelesaian

(a) $\log_{25} x = \dfrac{\log_5 x}{\log_5 25}$

$= \dfrac{p}{2}$

(b) $\log_x 25x^3 = \dfrac{\log_5 25x^3}{\log_5 x}$

$= \dfrac{\log_5 5^2 + \log_5 x^3}{p}$

$= \dfrac{2 \log_5 5 + 3 \log_5 x}{p}$

$= \dfrac{2 + 3p}{p}$

Latih Diri 4.12

1. Nilaikan setiap yang berikut dengan menukarkan asasnya kepada asas 10.

(a) $\log_3 22$ (b) $\log_6 1.32$ (c) $\log_5 18$ (d) $\log_4 0.815$

2. Tukarkan setiap yang berikut kepada logaritma jati dan nilaikan.

(a) $\log_7 225$ (b) $\log_9 324$ (c) $\log_{20} 379$

3. Diberi $\log_3 2 = t$, ungkapkan setiap yang berikut dalam sebutan t.

(a) $\log_2 9$ (b) $\log_9 8$ (c) $\log_2 18$ (d) $\log_2 \dfrac{9}{4}$

4. Jika $\log_2 m = a$ dan $\log_2 n = b$, ungkapkan setiap yang berikut dalam sebutan a dan b.

(a) $\log_4 m^2n^3$ (b) $\log_8 \dfrac{m}{n^2}$ (c) $\log_{mn} 8n$

Menyelesaikan masalah yang melibatkan hukum logaritma

Masalah yang melibatkan indeks, misalnya $3^x = 70$ yang tidak boleh diungkapkan dalam bentuk $a^x = a^y$ atau $a^x = b^x$ boleh diselesaikan dengan menggunakan logaritma.

Contoh 32

Selesaikan persamaan $3^{x-4} = 50^{x-3}$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
3^{x-4} &= 50^{x-3} \\
(x-4)\log 3 &= (x-3)\log 50 \quad \leftarrow \text{Ambil logaritma asas 10} \\
x\log 3 - 4\log 3 &= x\log 50 - 3\log 50 \quad \leftarrow \log_{10} a = \log a \\
x\log 3 - x\log 50 &= -3\log 50 + 4\log 3 \\
x(\log 3 - \log 50) &= -3\log 50 + 4\log 3 \\
x &= \frac{-3\log 50 + 4\log 3}{\log 3 - \log 50} \\
&= 2.610
\end{aligned}$$

Contoh 33

Selesaikan persamaan logaritma jati berikut.

(a) $\ln(4x-2) = 5$ (b) $10e^{2x} = 35$

Penyelesaian

(a)
$$\begin{aligned}
\ln(4x-2) &= 5 \\
\log_e(4x-2) &= 5 \\
e^5 &= 4x-2 \\
148.4132 &= 4x-2 \\
4x &= 150.4132 \\
x &= \frac{150.4132}{4} \\
&= 37.603
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
10e^{2x} &= 35 \\
e^{2x} &= 3.5 \\
\ln e^{2x} &= \ln 3.5 \\
2x\ln e &= \ln 3.5 \quad \leftarrow \ln e = 1 \\
2x &= \ln 3.5 \\
x &= \frac{\ln 3.5}{2} \\
&= 0.626
\end{aligned}$$

Contoh 34 APLIKASI MATEMATIK

Suhu sebongkah besi meningkat daripada 30°C kepada T°C apabila dipanaskan selama x saat. Diberi $T = 30(1.2)^x$, cari

(a) suhu bongkah besi itu apabila dipanaskan selama 10.4 saat,

(b) masa, x, dalam saat, yang diambil untuk meningkatkan suhu bongkah besi tersebut daripada 30°C kepada 1 500°C.

4.3.5

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Diberi rumus $T = 30(1.2)^x$
- Suhu meningkat daripada 30°C kepada T°C.
- Cari T apabila $x = 10.4$ saat
- Cari x apabila suhu besi meningkat daripada 30°C kepada 1 500°C.

2. Merancang strategi

- Gantikan nilai x ke dalam rumus untuk mencari nilai T.
- Gantikan nilai T ke dalam rumus untuk mencari nilai x.

3. Melaksanakan strategi

(a) $T = 30(1.2)^x$
$= 30(1.2)^{10.4}$
$= 199.8$°C

Maka, suhu besi selepas 10.4 saat ialah 199.8°C.

(b)
$$\begin{aligned} T &= 30(1.2)^x \\ 1\,500 &= 30(1.2)^x \\ \frac{1\,500}{30} &= (1.2)^x \\ 50 &= (1.2)^x \\ \log 50 &= x \log 1.2 \\ x &= \frac{\log 50}{\log 1.2} \\ &= 21.4567 \end{aligned}$$

Maka, masa yang diambil oleh bongkah besi itu untuk mencapai suhu 1 500°C ialah 21.4567 saat.

4. Membuat refleksi

(a) Apabila $T = 199.8$°C, maka
$$\begin{aligned} 199.8 &= 30(1.2)^x \\ \frac{199.8}{30} &= (1.2)^x \\ 6.66 &= (1.2)^x \\ \log 6.66 &= x \log 1.2 \\ x &= \frac{\log 6.66}{\log 1.2} \\ &= 10.4 \text{ saat} \end{aligned}$$

(b) Apabila $x = 21.4567$ saat, maka
$T = 30(1.2)^{21.4567}$
$\approx 1\,500$°C

Latih Diri 4.13

1. Selesaikan persamaan yang berikut dengan memberikan jawapan betul kepada tiga tempat perpuluhan.
(a) $4^{2x-1} = 7^x$ (b) $5^{2x-1} = 79^{x-1}$ (c) $7^{3x-1} = 50^x$

2. Selesaikan persamaan berikut menggunakan logaritma jati. Berikan jawapan betul kepada tiga tempat perpuluhan.
(a) $\ln (5x + 2) = 15$ (b) $30e^{2x+3} = 145$ (c) $5e^{3x-4} = 35$
(d) $\ln (3x - 2) = 4$ (e) $41 - e^{2x} = 5$ (f) $\ln (x + 1)^2 = 4$

3. Harga sebuah rumah selepas n tahun diberi oleh RM260 000$\left(\frac{9}{8}\right)^n$. Cari bilangan tahun minimum supaya harga rumah tersebut lebih daripada RM300 000 buat kali pertama.

BAB 4

4. Jumlah simpanan sebuah syarikat selepas n tahun diberi oleh RM2 000$(1 + 0.07)^n$. Cari bilangan tahun minimum supaya jumlah simpanannya melebihi RM4 000.

5. Selepas n tahun, wang Encik Chong di sebuah bank menjadi RM4 000$(1.1)^n$. Hitung bilangan tahun supaya wang Encik Chong melebihi RM5 100 buat kali pertama.

6. Tekanan udara, dalam Hg, bagi ketinggian 10 km di atas paras laut diberi oleh $P = 760e^{-0.125h}$, dengan h ialah ketinggian, dalam km, dan $e = 2.718$. Cari ketinggian di atas paras laut jika tekanan pada ketinggian tersebut ialah 380 mm Hg.

Latihan Intensif 4.3

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/330zUmc untuk kuiz

1. Diberi $\log_5 3 = 0.683$ dan $\log_5 7 = 1.209$. Tanpa menggunakan kalkulator atau buku sifir empat angka, kira $\log_5 1$ dan $\log_7 75$.

2. Diberi $\log_a 3 = x$ dan $\log_a 5 = y$, ungkapkan $\log_a \left(\frac{45}{a^3}\right)$ dalam sebutan x dan y.

3. Cari nilai bagi $\log_4 8 + \log_r \sqrt{r}$.

4. Tanpa menggunakan kalkulator atau buku sifir empat angka, permudahkan $\dfrac{\log_{12} 49 \times \log_{64} 12}{\log_{16} 7}$.

5. Diberi $\log_{10} x = 2$ dan $\log_{10} y = -1$, buktikan $xy - 100y^2 = 9$.

6. Diberi $\log_5 2 = m$ dan $\log_5 7 = p$, ungkapkan $\log_5 4.9$ dalam sebutan m dan p.

7. Permudahkan $\log_2 (2x + 1) - 5 \log_4 x^2 + 4 \log_2 x$.

8. Diberi bahawa $\log_2 xy = 2 + 3 \log_2 x - \log_2 y$, ungkapkan y dalam sebutan x.

9. Diberi $\log_2 b = x$ dan $\log_2 c = y$, ungkapkan $\log_4 \left(\frac{8b}{c}\right)$ dalam sebutan x dan y.

10. Kuasa bagi satu bunyi, dalam unit desibel, dihitung menggunakan rumus $d = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_0}\right)$ dengan d ialah kuasa bunyi, dalam desibel, P ialah kuasa bunyi, dalam Watt dan P_0 ialah kuasa bunyi paling lemah yang dapat dikesan oleh telinga manusia, dalam Watt yang merupakan suatu pemalar. Di sebuah rumah, sebuah pam air panas mempunyai kadaran bunyi 50 desibel dan kadaran kuasa 10^{-7} Watt manakala sebuah mesin pencuci pinggan mempunyai kadaran bunyi 62 desibel.
    (a) Kira nilai bagi P_0.
    (b) Cari nisbah kadaran kuasa, dalam unit Watt, bagi mesin pencuci pinggan kepada pam air panas.
    (c) Kuasa bagi satu bunyi yang melebihi 100 Watt dikatakan menyakiti telinga manusia. Nyatakan kuasa minimum bagi satu bunyi, dalam unit desibel, yang dianggap menyakiti telinga manusia.

11. Pertambahan populasi di sebuah negara diberi oleh fungsi $P = 2\,500\,000e^{0.04t}$ dengan t ialah bilangan tahun selepas tahun 2020 dan $e = 2.718$.
    (a) Apakah populasi negara itu pada tahun 2020?
    (b) Apakah populasi negara itu pada tahun 2030?
    (c) Pada tahun berapakah populasi negara tersebut melebihi 50 000 000?

4.3.5

4.4 Aplikasi Indeks, Surd dan Logaritma

Menyelesaikan masalah melibatkan indeks, surd dan logaritma

Contoh 35 APLIKASI MATEMATIK

Ahli entomologi mendapati bahawa wabak gangguan belalang terhadap tanaman tersebar seluas $A(n) = 1\,000 \times 2^{0.2n}$ ekar, dengan n ialah bilangan minggu selepas pemerhatian awal dibuat.

(a) Cari luas asal kawasan wabak.

(b) Cari luas kawasan wabak setelah

(i) 5 minggu, (ii) 10 minggu.

(c) Berapakah masa yang diambil untuk wabak itu merebak ke kawasan seluas 8 000 ekar?

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Diberi rumus $A(n) = 1\,000 \times 2^{0.2n}$
- $n = 0$, $n = 5$, $n = 10$
- $A = 8\,000$ ekar

2. Merancang strategi

- Gantikan nilai n ke dalam rumus yang diberi.
- Gantikan nilai A ke dalam rumus yang diberi.

3. Melaksanakan strategi

(a) $A(n) = 1\,000 \times 2^{0.2n}$

$A(0) = 1\,000 \times 2^{0.2(0)}$

$= 1\,000 \times 1$

$= 1\,000$ ekar

(b) (i) $A(n) = 1\,000 \times 2^{0.2n}$

$A(5) = 1\,000 \times 2^{0.2(5)}$

$= 1\,000 \times 2^1$

$= 2\,000$ ekar

(ii) $A(n) = 1\,000 \times 2^{0.2n}$

$A(10) = 1\,000 \times 2^{0.2(10)}$

$= 1\,000 \times 2^2$

$= 4\,000$ ekar

(c) $8\,000 = 1\,000 \times 2^{0.2n}$

$2^{0.2n} = 8$

$2^{0.2n} = 2^3$

$0.2n = 3$

$n = 15$

Maka, masa untuk wabak itu merebak ke kawasan seluas 8 000 ekar ialah 15 minggu.

4. Membuat refleksi

(a) Apabila $A = 1\,000$,

$1\,000 = 1\,000 \times 2^{0.2n}$

$2^{0.2n} = 1$

$0.2n \log 2 = \log 1$

$n = \dfrac{\log 1}{0.2 \times \log 2}$

$n = 0$ minggu

(b) (i) Apabila $A = 2\,000$,

$2\,000 = 1\,000 \times 2^{0.2n}$

$2^{0.2n} = 2$

$0.2n \log 2 = \log 2$

$n = \dfrac{\log 2}{0.2 \times \log 2}$

$n = 5$ minggu

(ii) Apabila $A = 4\,000$,

$4\,000 = 1\,000 \times 2^{0.2n}$

$2^{0.2n} = 4$

$0.2n \log 2 = \log 4$

$n = \dfrac{\log 4}{0.2 \times \log 2}$

$n = 10$ minggu

(c) Apabila $n = 15$,

$A = 1\,000 \times 2^{0.2(15)}$

$= 8\,000$ ekar

Latih Diri 4.14

1. Seorang pekebun memantau serangan serangga terhadap tanaman di kebunnya. Dia mendapati bahawa serangan serangga terhadap luas tanaman diberi oleh persamaan $A = 1\ 000 \times 2^{0.7n}$ hektar, dengan n ialah bilangan minggu selepas minggu pertama pemantauan dibuat. Berapakah tempoh masa yang diambil oleh serangga untuk menyerang kawasan seluas 5 000 hektar?

2. Arus elektrik yang mengalir dalam satu litar elektrik, t saat selepas suisnya ditutup diberi oleh $I = 32 \times 4^{-t}$ amp.
   (a) Berapakah arus yang mengalir ketika suisnya ditutup?
   (b) Berapakah arus yang mengalir selepas
       (i) 1 saat? (ii) 2 saat?
   (c) Berapakah masa yang diambil untuk arus mencapai 0.5 amp?

Latihan Intensif 4.4

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/31bpUoG untuk kuiz

1. Encik Ramasamy menyimpan wang sebanyak RM1 000 dalam sebuah bank. Jumlah wang itu meningkat mengikut persamaan $W = 1\ 000(1.09)^t$ selepas t tahun. Hitung
   (a) jumlah wang selepas 5 tahun,
   (b) masa, t, dalam tahun jumlah wang meningkat daripada RM1 000 kepada RM1 200.

2. Baki jisim bahan radioaktif uranium selepas t tahun diberi oleh $W(t) = 50 \times 2^{-0.0002t}$ gram, dengan $t \geqslant 0$.
   (a) Cari jisim asal uranium tersebut.
   (b) Cari masa yang diperlukan untuk jisim uranium berbaki 8 gram.

3. Jisim, J suatu bakteria dalam tempoh t, iaitu masa, dalam jam diberi oleh $J = 25 \times e^{0.1t}$ gram.
   (a) Tunjukkan bahawa masa untuk jisim bakteria mencapai 50 gram ialah 10 ln 2 jam.
   (b) Cari masa itu tepat kepada dua tempat perpuluhan.

RUMUSAN BAB 4

INDEKS, SURD DAN LOGARITMA

Indeks

Hukum indeks

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

Surd

- $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$
- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$
- $(a + \sqrt{b}) \times (a - \sqrt{b})$
  $= a^2 - b$

Logaritma

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a b^n = n \log_a b$
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

4.4.1

TULIS JURNAL ANDA

Bina satu poster yang mengandungi semua hukum indeks, surd dan logaritma mengikut kreativiti anda. Setiap hukum yang dinyatakan mestilah mengandungi contoh penggunaannya. Kemudian, gantungkan poster anda di dalam kelas.

LATIHAN PENGUKUHAN

1. Selesaikan persamaan $4^{2x-1} + 4^{2x} = 4$. TP1

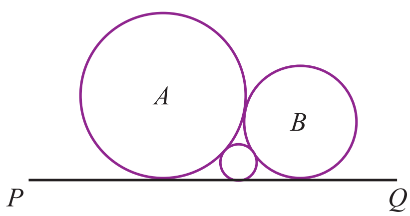
BAB 4

2. Selesaikan persamaan $5^{n+1} - 5^{n} + 5^{n-1} = 105$. TP2

3. Jika $\sqrt{5}x = \sqrt{3}x + \sqrt{7}$, cari nilai x dalam bentuk $\frac{\sqrt{a}}{b}$. TP2

4. Jika $\log_x a + \log_x \frac{1}{a} = t$, apakah nilai yang mungkin bagi t? TP2

5. Rajah di bawah menunjukkan tiga bulatan. Bulatan A berjejari 2 cm dan bulatan B pula berjejari 1 cm.



PQ ialah tangen sepunya dan semua bulatan adalah bersentuhan antara satu sama lain. Cari jejari bulatan yang paling kecil. TP5

6. Suhu sejenis logam menyusut daripada 100°C kepada T°C mengikut persamaan $T = 100(0.9)^x$ selepas x saat. Hitung TP4
   (a) suhu logam selepas 5 saat,
   (b) masa, x, dalam saat untuk suhu logam menyusut daripada 100°C kepada 80°C.

7. Selepas n tahun, harga sebuah kereta yang dibeli oleh Raju ialah RM60 000$\left(\frac{7}{8}\right)^n$. Cari bilangan tahun apabila harga kereta tersebut kurang daripada RM20 000 buat kali pertama. TP4

8. Diberi $\log_x 3 = s$ dan $\log_{\sqrt{y}} 9 = t$, ungkapkan $\log_9 x^3y$ dalam sebutan s dan/atau t. TP4

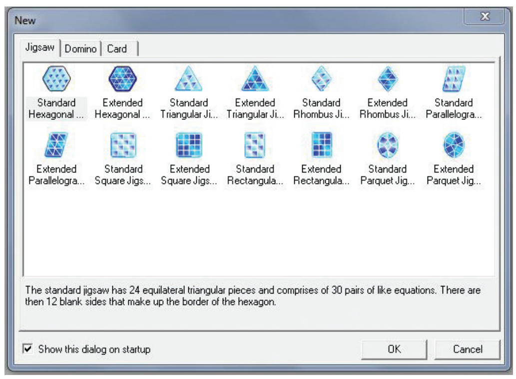
9. Dua eksperimen telah dijalankan untuk mencari hubungan antara pemboleh ubah x dan y. Hasil kedua-dua eksperimen menunjukkan bahawa hubungan antara x dan y masing-masing berdasarkan persamaan $3(9^x) = 27^y$ dan $\log_2 y = 2 + \log_2 (x - 2)$. Cari nilai x dan nilai y yang memenuhi kedua-dua eksperimen tersebut. TP5

10. Harga sebuah kereta menyusut dan boleh ditentukan dengan menggunakan persamaan $x \log_{10}\left(1 - \frac{2}{y}\right) = \log_{10} p - \log_{10} q$. Dalam persamaan ini, kereta dengan tempoh penggunaan y tahun dan harga RMq akan menyusut kepada RMp selepas digunakan selama x tahun. Sebuah kereta dibeli dengan harga RM100 000 mempunyai tempoh penggunaan 20 tahun. Jika harga kereta telah menyusut kepada RM10 000, cari tempoh penggunaan kereta itu. TP5

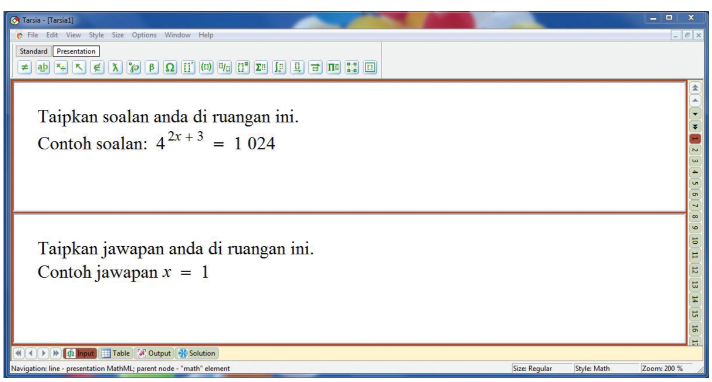
Penerokaan MATEMATIK

Membina permainan indeks dan surd menggunakan perisian Tarsia.

1. Muat turun perisian Tarsia di *bit.ly/2SssDGz*.
2. Klik "*Standard Rhombus Jigsaw*" pada paparan berikut.



3. Taipkan soalan dan jawapan di ruang yang berkenaan. Bilangan soalan yang perlu disiapkan terpapar di bahagian kanan skrin.



4. Kemudian, klik butang "*Output*" di bahagian bawah skrin untuk menjana *Jigsaw Puzzle*. Cetak *Jigsaw Puzzle* itu dan gunting mengikut bentuknya.
5. *Jigsaw Puzzle* sedia untuk digunakan. Klik butang "*Solution*" untuk menyemak jawapan.

BAB 4

BAB 5

Janjang

Apakah yang akan dipelajari?

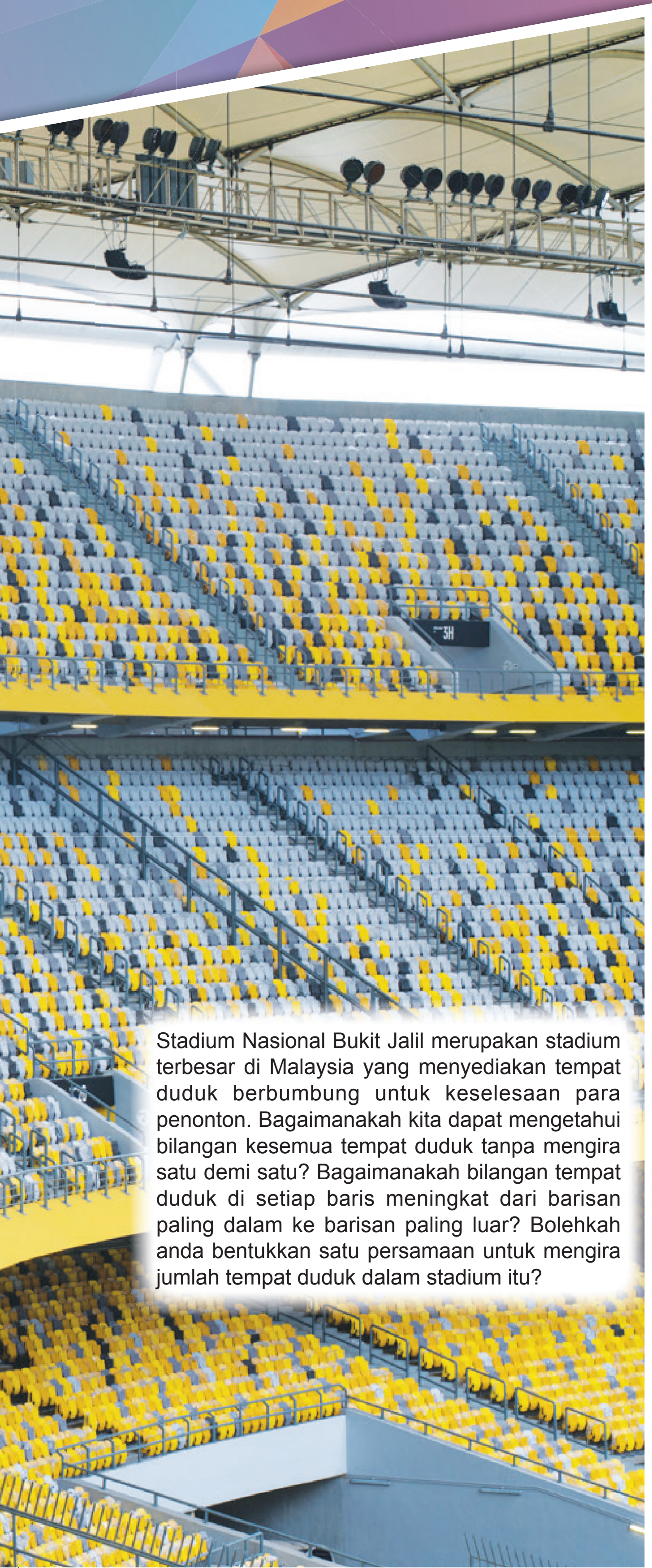
- Janjang Aritmetik
- Janjang Geometri

Senarai Standard Pembelajaran

bit.ly/2AmQvDU

KATA KUNCI

Jujukan	*Sequence*
Janjang aritmetik	*Arithmetic progression*
Beza sepunya	*Common difference*
Janjang geometri	*Geometric progression*
Nisbah sepunya	*Common ratio*
Hasil tambah ketakterhinggaan	*Sum to infinity*
Perpuluhan berulang	*Recurring decimal*



Stadium Nasional Bukit Jalil merupakan stadium terbesar di Malaysia yang menyediakan tempat duduk berbumbung untuk keselesaan para penonton. Bagaimanakah kita dapat mengetahui bilangan kesemua tempat duduk tanpa mengira satu demi satu? Bagaimanakah bilangan tempat duduk di setiap baris meningkat dari barisan paling dalam ke barisan paling luar? Bolehkah anda bentukkan satu persamaan untuk mengira jumlah tempat duduk dalam stadium itu?

Tahukah Anda?

Carl Friedrich Gauss ialah seorang ahli matematik yang digelar *Prince of Mathematics*. Kebijaksanaannya telah terbukti sejak beliau kanak-kanak lagi. Pada usia 3 tahun, Carl Friedrich Gauss telah membetulkan kesilapan pengiraan yang terdapat pada senarai upah ayahnya. Pada usia 7 tahun pula, beliau dapat menghitung jumlah nombor 1 hingga 100 dengan pantas dan tepat.

Untuk maklumat lanjut:

bit.ly/2XSg2yk

SIGNIFIKAN BAB INI

Pengetahuan untuk menyelesaikan masalah berkaitan janjang amat penting dalam bidang kejuruteraan, perubatan, teknologi dan ekonomi. Pengetahuan tentang janjang membolehkan jumlah nombor yang terlalu banyak dapat diketahui dengan mudah.

Imbas kod *QR* ini untuk menonton video Stadium Nasional Bukit Jalil.

bit.ly/2Vijima

5.1 Janjang Aritmetik

Mengenal pasti janjang aritmetik

Encik Lee membina tangga di taman bunga miliknya. Dia menggunakan lapan biji bata pada anak tangga pertama. Setiap anak tangga yang seterusnya menggunakan tambahan lapan biji bata. Jumlah bata yang digunakan pada setiap anak tangga boleh ditulis dalam suatu jujukan 8, 16, 24, … Jika Encik Lee ingin membina 18 anak tangga, berapakah bilangan bata yang diperlukan oleh Encik Lee?

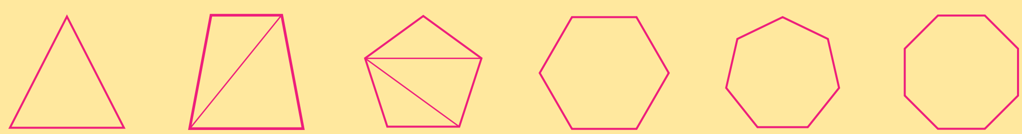
8, 16, 24, … ialah jujukan yang mengikut corak tertentu dan terhingga. Jujukan seperti 3, –3, 3, –3, … ialah jujukan tak terhingga. Setiap nombor dalam jujukan dikenali sebagai sebutan, dengan sebutan pertama ditulis sebagai T_1, sebutan kedua T_2 dan seterusnya sehingga sebutan T_n, iaitu sebutan ke-n.

INKUIRI 1 Berkumpulan

Tujuan: Memahami janjang aritmetik

Arahan:

1. Perhatikan setiap poligon berikut dengan keadaan bilangan sisi poligon berturutan bertambah satu dari poligon sebelumnya.



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

2. Bahagikan setiap poligon kepada bentuk segi tiga seperti yang ditunjukkan pada poligon (b) dan (c).
3. Dalam jadual, isikan hasil tambah sudut pedalaman bagi setiap poligon yang diberi.

Susunan poligon, n	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
Hasil tambah sudut pedalaman	180°					

4. Bagaimanakah anda mendapatkan sebutan berturutan bagi hasil tambah sudut pedalaman poligon-poligon itu?
5. Terangkan hubungan antara sebarang dua sebutan berturutan dan nyatakan nilai tetap yang menghubungkan dua sebutan itu.
6. Tanpa melukis rajah, cari hasil tambah sudut pedalaman bagi susunan poligon yang kesepuluh.

Hasil daripada Inkuiri 1, didapati bahawa beza antara sebarang dua sebutan dalam suatu jujukan ialah satu pemalar yang sama. Pemalar tersebut dikenali sebagai **beza sepunya** dan diwakili dengan d. Oleh itu:

$$d = T_2 - T_1 = T_3 - T_2 = \ldots = T_n - T_{n-1}$$

$$d \neq T_1 - T_2 \neq T_2 - T_3 \neq \ldots \neq T_{n-1} - T_n$$

5.1.1

BAB 5

Jujukan yang mempunyai beza sepunya, d dikenali sebagai **janjang aritmetik**.

Janjang aritmetik ialah suatu jujukan nombor dengan setiap sebutan diperoleh dengan menambahkan satu pemalar kepada sebutan sebelumnya.

Contoh 1

Tentukan sama ada jujukan yang berikut ialah janjang aritmetik atau bukan. Beri justifikasi anda.

(a) 358, 350, 342, …

(b) $\frac{2}{3}, 2, \frac{10}{3}, 5, \ldots$

Penyelesaian

(a) $d_1 = 350 - 358 = -8$
$d_2 = 342 - 350 = -8$
Jujukan ini ialah janjang aritmetik kerana $d_1 = d_2 = -8$.

(b) $d_1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$
$d_2 = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}$
$d_3 = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$
Jujukan ini bukan janjang aritmetik kerana $d_1 = d_2 \neq d_3$.

Contoh 2

Sebuah auditorium mempunyai 15 buah kerusi pada baris pertama, 19 buah kerusi pada baris kedua, 23 buah kerusi pada baris ketiga dan seterusnya. Tentukan sama ada susunan kerusi pada setiap baris mengikut janjang aritmetik atau bukan. Beri justifikasi anda.

Penyelesaian

Jujukan: 15, 19, 23, …
$d_1 = 19 - 15 = 4$
$d_2 = 23 - 19 = 4$
Oleh sebab beza sepunya janjang ini adalah sama, iaitu 4, maka susunan kerusi pada setiap baris di dalam auditorium tersebut mengikut janjang aritmetik.

Latih Diri 5.1

1. Cari beza sepunya bagi setiap janjang aritmetik berikut dan nyatakan cara janjang aritmetik itu diperoleh.

(a) $-35, -21, -7, \ldots$

(b) $2\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 8\sqrt{3}, \ldots$

(c) $p + q, 2p, 3p - q, \ldots$

(d) $\log_a 2, \log_a 2^4, \log_a 2^7, \ldots$

5.1.1

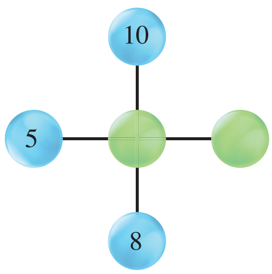
2. Tentukan sama ada setiap jujukan berikut ialah janjang aritmetik atau bukan dan beri justifikasi.

(a) $9, 13, 17, 21, \ldots$ (b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$

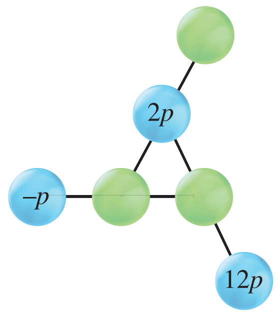
(c) $0.1, 0.01, 0.001, \ldots$ (d) $5 - x, 5, 5 + x, \ldots$

3. Lengkapkan jaringan nombor yang berikut, diberi hubungan bagi setiap jaringan ialah sebutan berturutan dalam janjang aritmetik.

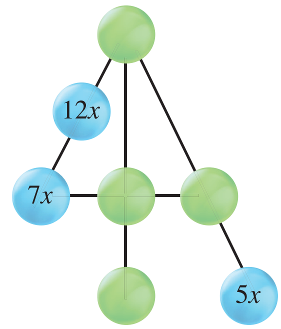
(a)



(b)



(c)



4. Azrul dan Jonathan ditugaskan untuk meletakkan bendera Malaysia di sepanjang laluan pejalan kaki di sekolahnya bermula dari kantin sekolah ke bilik guru. Jarak bendera pertama dari bendera kedua ialah 5 m. Bendera yang ketiga terletak 10 m dari bendera pertama dan pola susunan ini diteruskan sehingga bendera yang terakhir. Tentukan sama ada susunan bendera-bendera itu mengikut janjang aritmetik atau tidak. Beri justifikasi bagi jawapan anda.

BAB 5

Menerbitkan rumus sebutan ke-n, T_n bagi janjang aritmetik

INKUIRI 2 Berkumpulan

Tujuan: Menerbitkan rumus sebutan ke-n, T_n bagi janjang aritmetik

Arahan:

1. Pertimbangkan suatu janjang aritmetik 2, 5, 8, 11, 14, ... Gunakan corak jujukan ini untuk membantu anda melengkapkan jadual.
2. Andaikan sebutan pertama suatu janjang aritmetik ialah a dengan beza sepunya d.
3. Lengkapkan jadual di bawah.

Sebutan	Nilai sebutan	Kaedah mendapatkan nilai sebutan	Rumus (kaedah deduksi)
T_1	a	Tidak mempunyai d	$T_1 = a + 0d$
T_2	$a + d$	Tambah d pada sebutan T_1	$T_2 = a + 1d$
T_3	$a + d + d$	Tambah d pada sebutan T_2	$T_3 = a + 2d$
⋮	⋮	⋮	⋮
T_n			

4. Bersama-sama ahli kumpulan, jawab soalan berikut.
   (a) Ungkapkan T_{20}, dalam sebutan a dan d.
   (b) Nyatakan perkaitan antara sebutan T_n dengan beza sepunya.
   (c) Tulis satu rumus umum bagi T_n.

Hasil daripada Inkuiri 2, didapati bahawa sebutan ke-n bagi suatu janjang aritmetik boleh ditulis sebagai:

$$T_n = a + (n - 1)d$$

Dengan a ialah sebutan pertama, d ialah beza sepunya dan n ialah bilangan sebutan.

Contoh 3

(a) Cari sebutan ke-15 bagi janjang aritmetik $-4, 2, 8, \ldots$
(b) Cari sebutan ke-24 bagi janjang aritmetik $-6, 5, 16, \ldots$

Penyelesaian

(a) Sebutan pertama, $a = -4$
Beza sepunya, $d = 2 - (-4) = 6$
Sebutan ke-15, $T_{15} = -4 + (15 - 1)6$
$= 80$

(b) Sebutan pertama, $a = -6$
Beza sepunya, $d = 5 - (-6) = 11$
Sebutan ke-24, $T_{24} = -6 + (24 - 1)11$
$= 247$

PANTAS KIRA

Berdasarkan Contoh 3, kita boleh menggunakan kalkulator saintifik untuk mendapatkan sebutan ke-15.

1. Tekan $\boxed{-4}\ \boxed{+}\ \boxed{(}\ \boxed{\text{ALPHA}}\ \boxed{)}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{)}\ \boxed{(}\ \boxed{6}\ \boxed{)}\ \boxed{\text{CALC}}$
Skrin yang dipaparkan:

–4 + (*x* – 1)(6)
x =

2. Tekan $\boxed{15}\ \boxed{=}$
Skrin yang dipaparkan:

–4 + (*x* – 1)(6)
80

3. Tekan $\boxed{=}$ untuk memasukkan nilai sebutan yang lain

Contoh 4

Diberi suatu janjang aritmetik dengan sebutan pertama ialah -6, beza sepunya ialah 11 dan sebutan ke-n ialah 126, cari nilai n.

Penyelesaian

$a = -6, d = 11, T_n = 126$
$T_n = a + (n - 1)d$
$126 = -6 + (n - 1)(11)$
$126 = 11n - 17$
$n = 13$

Contoh 5

Dalam satu pameran buku, Siti ingin menyusun buku-buku di bahagian hadapan ruang pameran. Dia menyusun buku-buku itu secara meninggi dengan tebal buku pertama yang berada di bahagian paling bawah ialah 2 cm. Setiap buku yang seterusnya mempunyai ketebalan yang sama, iaitu 1.5 cm. Cari

(a) jumlah ketebalan buku itu apabila Siti menyusun 16 buah buku.
(b) bilangan buku yang telah disusun apabila tinggi susunan buku ialah 30.5 cm.

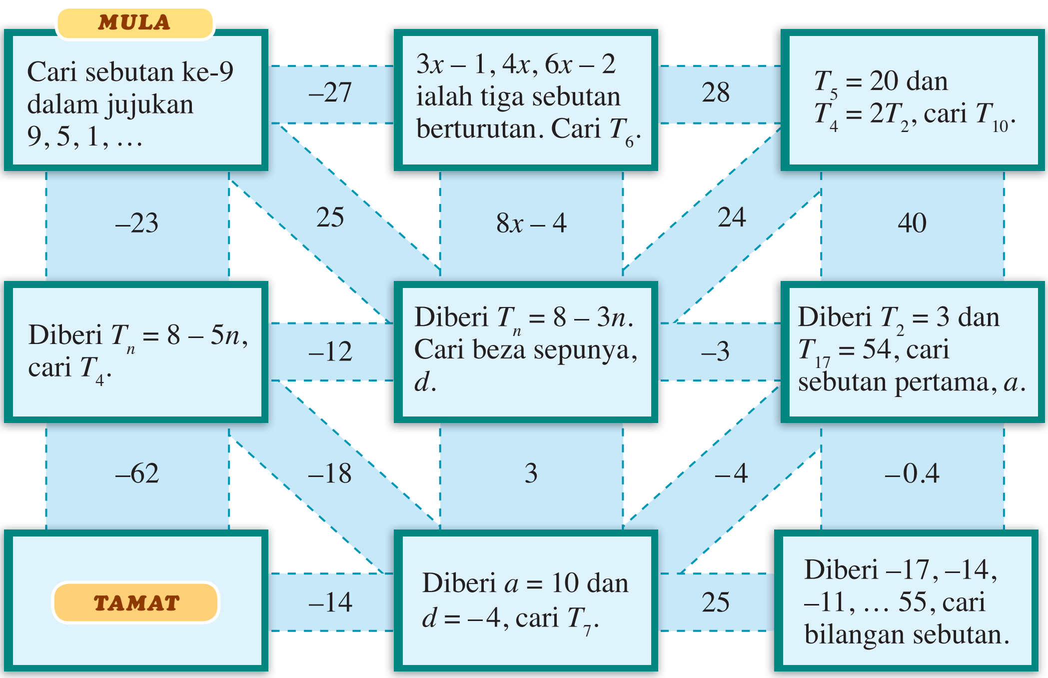
Penyelesaian

(a) Jujukan jumlah ketebalan buku: 2, 3.5, 5, 6.5, …
$a = 2, d = 1.5$
Jumlah ketebalan buku pada kedudukan ke-16 $= 2 + (16 - 1)(1.5)$
$= 24.5$ cm
Maka, jumlah ketebalan susunan buku apabila Siti menyusun 16 buah buku ialah 24.5 cm.

(b) $T_n = 30.5$
$30.5 = 2 + (n - 1)(1.5)$
$n - 1 = 19$
$n = 20$
Maka, bilangan buku yang telah disusun ialah 20 buah.

Latih Diri 5.2

1. Cari jalan hingga ke petak TAMAT dengan memilih jawapan yang betul.

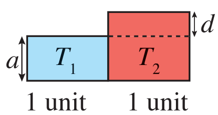
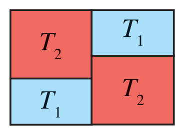
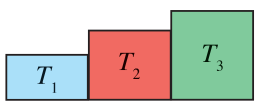
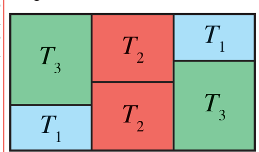


2. Encik Muiz mula bekerja di sebuah syarikat pada satu bulan tertentu. Gaji tahunan yang ditawarkan pada tahun pertama ialah RM36 000 dan kenaikan gaji untuk tahun seterusnya ialah RM1 000. Hitung
(a) bilangan tahun Encik Muiz perlu bekerja supaya dia memperoleh dua kali ganda gaji tahun pertama.
(b) kenaikan gaji tahunannya jika gajinya pada tahun ke-6 ialah RM43 500.

Menerbitkan rumus hasil tambah n sebutan pertama, S_n bagi janjang aritmetik

INKUIRI 3 Berkumpulan

Tujuan: Menerbitkan rumus hasil tambah sebutan ke-n, S_n bagi janjang aritmetik
Arahan:
1. Perhatikan jadual yang berikut.

Hasil tambah sebutan	Bilangan petak mengikut bilangan sebutan	Rumus menggunakan kaedah deduksi luas segi empat tepat
S_2	Rajah I  $T_1 = a$ $T_2 = a + (2 - 1)d$ $= a + d$	Rajah II  Luas segi empat $= (T_1 + T_2)2$ $= [a + a + (2 - 1)d]2$ $S_2 = \dfrac{2[2a + (2 - 1)d]}{2}$
S_3	Rajah III  $T_1 = a$ $T_2 = a + (2 - 1)d$ $T_3 = a + (3 - 1)d$	Rajah IV  Luas segi empat $= (T_1 + T_3)3$ $S_3 = \dfrac{(T_1 + T_3)3}{2}$ $= \dfrac{3}{2}[a + a + (3 - 1)d]$
S_4		
:	:	:
S_n		

2. Rajah I menunjukkan dua petak masing-masing dengan lebar 1 unit disusun bersebelahan.
- Tinggi petak biru ialah a unit yang mewakili sebutan pertama, T_1.
- Tinggi petak merah adalah d unit lebih panjang daripada petak biru yang mewakili sebutan kedua, $T_2 = a + d$ atau $T_2 = a + (2 - 1)d$.

3. Dalam Rajah II, petak merah diletakkan di atas petak biru supaya jumlah tingginya menjadi $T_1 + T_2 = a + a + (2 - 1)d$ unit. Petak biru pula diletakkan di atas petak merah supaya tingginya juga menjadi $T_1 + T_2 = a + a + (2 - 1)d$ unit.

4. Perhatikan bahawa kedua-dua petak biru dan merah menjadi sebuah segi empat tepat. Hasil tambah petak biru dan petak merah, S_2 adalah separuh daripada luas segi empat tepat yang terbentuk. Hasil tambah ini boleh ditulis sebagai $\dfrac{2[2a + (2 - 1)d]}{2}$.

5. Ulang langkah 1 hingga 3 untuk mendapatkan S_4 dan seterusnya cari S_n.

6. Deduksikan rumus hasil tambah bagi n sebutan pertama, S_n.

Daripada Inkuiri 3, didapati bahawa rumus hasil tambah sebutan ke-n bagi janjang aritmetik boleh diperoleh dengan menggunakan kaedah luas segi empat yang dibina daripada sebutan-sebutan janjang aritmetik itu.

Maka, rumus hasil tambah n sebutan pertama, S_n boleh ditulis sebagai:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

Dengan a ialah sebutan pertama, n ialah bilangan sebutan dan d ialah beza sepunya.

Oleh sebab $T_n = a + (n - 1)d$ juga adalah sebutan terakhir, l, maka hasil tambah sebutan ke-n, S_n boleh ditulis seperti berikut:

$$S_n = \frac{n}{2}[a + T_n] \quad \text{atau} \quad S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

Sebutan ke-n bagi suatu janjang aritmetik boleh diperoleh menggunakan rumus hasil tambah n sebutan pertama, S_n. Misalnya, untuk mencari nilai sebutan ke-10 dalam suatu janjang aritmetik, hasil tambah sepuluh sebutan pertama perlu ditolak dengan hasil tambah sembilan sebutan pertama, iaitu $T_{10} = S_{10} - S_9$. Secara amnya:

$$T_n = S_n - S_{n-1}$$

Contoh 6

Diberi suatu janjang aritmetik 4, 7, 10, …, cari
(a) hasil tambah 35 sebutan pertama,
(b) hasil tambah n sebutan pertama.

Penyelesaian

(a) Sebutan pertama, $a = 4$
Beza sepunya, $d = 7 - 4 = 3$
$S_{35} = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{35}$
$S_{35} = \frac{35}{2}[2(4) + (35 - 1)(3)]$
$= 1\ 925$

(b) $S_n = \frac{n}{2}[2(4) + (n - 1)(3)]$
$= \frac{n}{2}[5 + 3n]$

Contoh 7

Hasil tambah sepuluh sebutan pertama bagi suatu janjang aritmetik ialah 230 dan hasil tambah sepuluh sebutan yang berikutnya ialah 630. Cari sebutan pertama, a dan beza sepunya, d bagi janjang aritmetik ini.

Penyelesaian

$S_{10} = \frac{10}{2}[2a + (10 - 1)d]$
$230 = 5(2a + 9d)$
$46 = 2a + 9d \quad \cdots ①$

$S_{20} = \frac{20}{2}[2a + (20 - 1)d]$
$230 + 630 = 10(2a + 19d)$
$860 = 10(2a + 19d)$
$86 = 2a + 19d \quad \cdots ②$
② – ①: $40 = 10d$
$d = 4$

Cabar Minda

Dalam Contoh 7, mengapakah $S_{20} = 230 + 630$? Jelaskan jawapan anda.

SUMBANG SARAN

Bincang bersama dengan rakan dan buktikan bahawa:
(a) $S_8 - S_5 = T_6 + T_7 + T_8$.
(b) $S_n - S_{n-1} = T_n$.

Gantikan $d = 4$ ke dalam ①,

$46 = 2a + 9(4)$

$2a = 10$

$a = 5$

Maka, sebutan pertama, a ialah 5 dan beza sepunya, d ialah 4.

TIP PINTAR

Janjang aritmetik ditulis dalam bentuk $T_1, T_2, T_3, \ldots$ manakala siri aritmetik ditulis dalam bentuk $T_1 + T_2 + T_3 + \ldots$

Contoh 8

Sekumpulan lebah mula membuat satu sarang lebah yang baharu. 2 lubang heksagon dibuat pada hari pertama, 5 lubang heksagon pada hari kedua, 8 lubang heksagon pada hari ketiga dan seterusnya sehingga sarang lebah itu siap sepenuhnya. Hitung

(a) jumlah lubang heksagon pada hari ke-12,

(b) bilangan minimum hari jika lebih daripada 1 000 lubang heksagon telah dibuat.

Penyelesaian

(a) Jujukan bilangan lubang heksagon: 2, 5, 8, …

Jujukan ini ialah suatu janjang aritmetik.

Sebutan pertama, $a = 2$

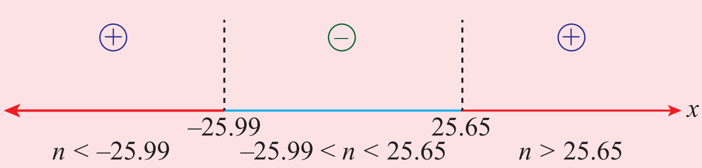
Beza sepunya, $d = 5 - 2 = 3$

Jumlah lubang heksagon pada hari ke-12,

$$S_{12} = \frac{12}{2}[2(2) + (12 - 1)(3)]$$
$$= 222$$

(b) Jumlah hari, $S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots T_n$

$$S_n > 1\ 000$$
$$\frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] > 1\ 000$$
$$\frac{n}{2}[2(2) + (n - 1)(3)] > 1\ 000$$
$$n[1 + 3n] > 2\ 000$$
$$3n^2 + n > 2\ 000$$
$$3n^2 + n - 2\ 000 > 0$$



$n > \dfrac{153.92}{6}$ atau $n < -\dfrac{155.92}{6}$

$n > 25.65$ $\quad\quad < -25.99$ (Abaikan)

Maka, bilangan minimum hari untuk membuat lebih daripada 1 000 lubang heksagon ialah 26 hari.

POKET MATEMATIK

Sarang lebah terdiri daripada gabungan bentuk heksagon supaya tiada ruang yang akan terbentuk antara bentuk heksagon. Oleh itu, lebah tidak perlu menggunakan lilin (*wax*) yang banyak untuk membina sarangnya. Luas permukaan bentuk heksagon adalah paling besar jika dibandingkan dengan bentuk-bentuk yang lain.

Imbas kod *QR* ini untuk mengetahui sebab sarang lebah berbentuk heksagon dengan lebih lanjut.

bit.ly/304Y3Xx

IMBAS KEMBALI

Jika $3n^2 + n - 2\ 000 = 0$, maka

$n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(3)(-2\ 000)}}{2(3)}$,

dan $n = 25.65$ atau

$n = -25.99$

Cabar Minda

Dalam Contoh 8, mengapakah nilai –25.99 diabaikan?

BAB 5

5.1.3

Latih Diri 5.3

1. Cari hasil tambah bagi janjang aritmetik yang berikut.

(a) $-20, -15, -10, \ldots, 100$

(b) $\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, \ldots$ kepada 23 sebutan yang pertama.

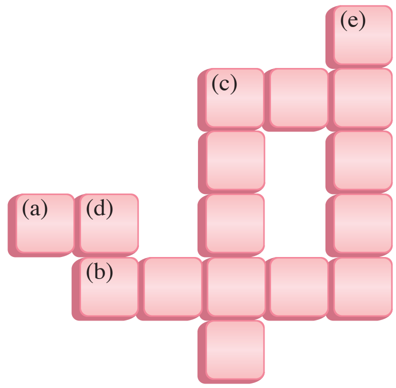
2. Lengkapkan teka silang kata berikut.

Melintang:

(a) Cari hasil tambah siri aritmetik $38 + 34 + 30 + \ldots$ sehingga 18 sebutan pertama.

(b) Cari hasil tambah bagi 100 sebutan pertama suatu janjang aritmetik dengan sebutan pertama -10 dan beza sepunya 6.

(c) Cari sebutan pertama janjang aritmetik dengan hasil tambah 42 sebutan pertama ialah 5 838 dan sebutan terakhir ialah -22.



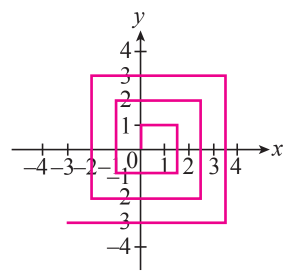
Menegak:

(c) Hitung S_{140} suatu janjang aritmetik yang mempunyai 140 sebutan dengan sebutan pertama dan terakhir masing-masing ialah 2 dan 449.

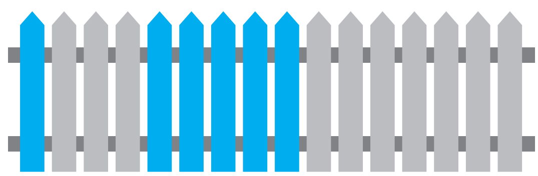
(d) Hitung nilai n suatu janjang aritmetik dengan sebutan pertama -15, beza sepunya -3 dan hasil tambah n sebutan pertama $-1\ 023$.

(e) Hitung hasil tambah 200 sebutan selepas 50 sebutan pertama suatu janjang aritmetik dengan hasil tambah n sebutan pertama ialah $S_n = \frac{n}{2}[n + 1]$.

3. Rajah di sebelah menunjukkan corak yang dilukis pada satah Cartes. Garis terakhir pada satah itu adalah selari dengan paksi-y dan melalui $x = -10$. Cari hasil tambah bagi panjang keseluruhan corak itu.



4. Rajah di sebelah menunjukkan pagar yang diperbuat daripada kepingan kayu. Pagar itu dicat dengan warna biru dan kelabu secara berselang-seli seperti ditunjukkan dalam rajah. Bilangan kepingan kayu yang berwarna sama bertambah dengan kadar yang ditunjukkan seperti dalam rajah. Jika terdapat hanya 200 kepingan kayu,



(a) cari bilangan kepingan kayu berwarna sama dan lengkap yang dapat dibentuk. Seterusnya, cari bilangan kepingan kayu yang tinggal, jika ada.

(b) nyatakan warna kayu terakhir dan seterusnya, hitung bilangan kepingan kayu bagi warna itu yang digunakan.

Menyelesaikan masalah melibatkan janjang aritmetik

Contoh 9 APLIKASI MATEMATIK

Encik Suhaimi, seorang penternak ayam mempunyai 1 500 ekor ayam. Dia bercadang untuk menjual 200 ekor ayam setiap hari. Dia memberi makanan kepada semua ayam itu dengan perbelanjaan makanan bagi seekor ayam ialah RM0.50 sehari. Hitung jumlah kos perbelanjaan makanan ayam yang diperuntukkan oleh Encik Suhaimi bermula daripada 1 500 ekor ayam yang ada hingga 300 ekor ayam yang tinggal.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Cari jumlah kos perbelanjaan makanan ayam hingga terdapat 300 ekor ayam yang tinggal.

2. Merancang strategi

- Bentukkan jujukan janjang aritmetik dengan sebutan pertama, a dan beza sepunya, d hingga sebutan terakhir, 300.
- Tentukan bilangan hari Encik Suhaimi menjual ayam hingga terdapat 300 ekor ayam yang tinggal menggunakan rumus $T_n = a + (n - 1)d$.
- Tentukan jumlah kos perbelanjaan makanan ayam hingga terdapat 300 ekor ayam yang tinggal menggunakan rumus $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$.

3. Melaksanakan strategi

Janjang aritmetik:
1 500, 1 300, 1 100, …, 300
Sebutan pertama = 1 500
Beza sepunya = –200

$$\begin{aligned} T_n &= a + (n - 1)d \\ 300 &= 1\,500 + (n - 1)(-200) \\ 300 &= 1\,700 - 200n \\ 200n &= 1\,400 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Pada hari ke-7, bilangan ayam yang tinggal ialah 300 ekor.

$$\begin{aligned} S_7 &= \frac{7}{2}[2(1\,500) + (7 - 1)(-200)] \\ &= 6\,300 \end{aligned}$$

Jumlah kos perbelanjaan makanan
= 6 300 × RM0.50
= RM3 150

4. Membuat refleksi

$$\begin{aligned} n = 7, T_7 &= 1\,500 + (7 - 1)(-200) \\ &= 300 \end{aligned}$$

Latih Diri 5.4

1. Encik Tong memesan 1 000 buah buku teks Matematik Tingkatan 4 untuk dijual di kedai buku miliknya. Dia menjangkakan sebanyak 10 buah buku akan terjual pada hari pertama, 14 buah buku pada hari kedua, 18 buah buku pada hari ketiga dan hari-hari seterusnya dengan kadar yang sama.
(a) Hitung bilangan hari yang diperlukan untuk Encik Tong menjual kesemua buku itu.
(b) Hitung kadar peningkatan buku yang perlu dijual setiap hari supaya kesemua buku habis dijual dalam masa 10 hari.

2. Seutas dawai yang panjangnya 240 cm dipotong kepada 15 bahagian dengan panjang setiap bahagian mengikut janjang aritmetik. Bahagian terpanjang bagi dawai itu ialah 30 cm.
(a) Hitung panjang dawai dengan bahagian terpendek.
(b) Cari beza panjang antara dua bahagian dawai yang berturutan.

Latihan Intensif 5.1

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2CUaOdW untuk kuiz

1. Tentukan sama ada jujukan yang berikut adalah janjang aritmetik atau bukan dan beri justifikasi jawapan anda.
(a) $-32, -17, -2, 13$ (b) $8.2, 5.7, 3.2, 1.7, -0.8$

2. Bagi setiap janjang aritmetik yang berikut, cari sebutan ke-n seperti yang dinyatakan dalam kurungan.
(a) $-12, -9, -6, \ldots$ [sebutan ke-9] (b) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1, \ldots$ [sebutan ke-15]

3. Tentukan bilangan sebutan bagi setiap janjang aritmetik yang berikut.
(a) $-0.12, 0.07, 0.26, \ldots, 1.97$ (b) $x, 3x + y, 5x + 2y, \ldots, 27x + 13y$

4. Cari hasil tambah bagi janjang aritmetik $-23, -17, -11, \ldots$ yang mengandungi
(a) 17 sebutan, (b) $2n$ sebutan, dalam sebutan n,
(c) sebutan terakhir 121.

5. Diberi $S_n = 2n^2 - 5n$, cari
(a) sebutan pertama,
(b) sebutan ke-9,
(c) hasil tambah dari sebutan ke-4 hingga sebutan ke-8.

6. Sebutan kedua suatu janjang aritmetik ialah $\frac{1}{2}$ dan hasil tambah 14 sebutan yang pertama ialah -70. Cari
(a) beza sepunya, (b) sebutan terakhir.

7. Yui Ming mendapat tawaran pekerjaan di dua buah syarikat dengan tawaran gaji seperti berikut.

Syarikat A: Gaji bulanan RM3 500 dan kenaikan gaji sebanyak RM20 setiap bulan.
Syarikat B: Gaji tahunan RM46 000 dan kenaikan gaji sebanyak RM1 000 setiap tahun.

Yui Ming bercadang ingin bekerja selama 3 tahun. Syarikat yang manakah lebih sesuai untuk Yui Ming supaya dia mendapat jumlah gaji maksimum dalam masa 3 tahun itu? Tunjukkan jalan pengiraan anda dan hitung beza antara lebihan jumlah gaji antara kedua-dua syarikat itu.

5.2 Janjang Geometri

Mengenal pasti janjang geometri

Terdapat satu legenda yang terkenal tentang penciptaan catur yang berkaitan dengan siri. Menurut legenda, seorang raja dari India ingin menemui pencipta permainan catur untuk diberi penghargaan kerana telah mencipta satu permainan yang bijak dan menarik. Pencipta catur itu hanya meminta untuk diberikan kepadanya gandum mengikut kiraan seperti berikut:

1 butir gandum pada petak pertama, 2 butir gandum pada petak kedua, 4 butir gandum pada petak ketiga dan seterusnya sehingga petak terakhir.

Apabila seluruh papan catur itu dipenuhi, jumlah gandum yang perlu diberikan kepada pencipta catur itu adalah sebanyak 1.84×10^{19} butir gandum, iaitu kira-kira 1.2 tan metrik. Kiraan bilangan gandum yang diperoleh boleh dihitung menggunakan konsep janjang geometri.

INKUIRI 4 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Mengenal janjang geometri

Arahan:

1. Teliti situasi berikut.

   Terdapat pelbagai bakteria yang wujud di sekeliling kita. Bakteria boleh terdapat pada makanan yang kotor, usus manusia dan haiwan. Bakteria boleh membiak dengan cepat dan mengakibatkan penyakit seperti cirit-birit. Kadar pembiakan sejenis bakteria adalah secara belahan dedua, iaitu bagi setiap tempoh 20 minit, satu bakteria akan menjadi dua, dua bakteria akan menjadi empat dan seterusnya membiak dalam kadar yang sama. Jika usus seseorang mempunyai dua juta bakteria tersebut, seseorang itu akan dijangkiti dengan penyakit cirit-birit.

2. Andaikan dalam sejenis makanan terdapat satu bakteria sahaja. Jika anda makan makanan itu, jangkakan tempoh masa untuk anda dijangkiti dengan penyakit cirit-birit, iaitu dengan keadaan terdapat dua juta bakteria di dalam usus anda.
3. Jadual di bawah menunjukkan bilangan bakteria yang membiak. Satu petak mewakili pembiakan bakteria dalam tempoh 20 minit. Lengkapkan jadual berikut sehingga bilangan bakteria mencapai syarat anda dijangkiti cirit-birit.

1	2	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$			

5.2.1

4. Berapakah tempoh masa untuk anda dijangkiti cirit-birit?
5. Tentukan cara untuk memperoleh bilangan bakteria pada setiap 20 minit daripada 20 minit sebelumnya. Adakah nilai yang anda peroleh suatu pemalar?
6. Gunakan perisian *GeoGebra* dan lukiskan graf untuk mewakili bilangan bakteria bertambah dengan masa.
7. Bincang dengan rakan sekumpulan tentang hasil yang diperoleh dan catatkan hasil dapatan pada sehelai kertas.
8. Setiap kumpulan bergerak ke kumpulan yang lain untuk membandingkan hasil dapatan yang diperoleh.

Hasil daripada Inkuiri 4, didapati bahawa nisbah antara sebarang dua sebutan berturutan adalah satu nombor tetap. Maka jujukan ini dikenali sebagai **janjang geometri**.

Janjang geometri ialah suatu jujukan nombor dengan setiap sebutan diperoleh dengan mendarabkan suatu pemalar dengan sebutan sebelumnya.

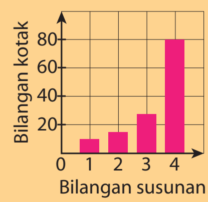
Katakan $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ ialah n sebutan pertama bagi suatu janjang geometri. Nisbah bagi dua sebutan berturutan dikenali sebagai nisbah sepunya, r.

$$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \ldots = \frac{T_n}{T_{n-1}} \longleftarrow r \neq \frac{T_1}{T_2} \neq \frac{T_2}{T_3} \neq \ldots \neq \frac{T_{n-1}}{T_n}$$

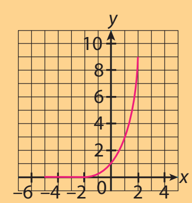
POKET MATEMATIK

Graf bagi jujukan geometri hampir serupa dengan graf fungsi eksponen. Graf jujukan geometri adalah diskret manakala graf fungsi eksponen adalah selanjar.

Graf jujukan geometri



Graf eksponen



Contoh 10

Tentukan sama ada jujukan berikut ialah suatu janjang geometri atau bukan. Beri justifikasi anda.
(a) $5, 15, 45, 135, \ldots$
(b) $0.1, 0.2, 0.3, \ldots$

Penyelesaian

(a) $r_1 = \frac{15}{5} = 3, r_2 = \frac{45}{15} = 3, r_3 = \frac{135}{45} = 3$

Jujukan ini ialah janjang geometri kerana nisbah sepunya, r adalah sama.

(b) $r = \frac{0.2}{0.1} = 2, r = \frac{0.3}{0.2} = \frac{3}{2}$

Jujukan ini bukan janjang geometri kerana nisbah sepunya, r tidak sama.

5.2.1

Latih Diri 5.5

1. Tentukan sama ada jujukan yang berikut ialah janjang geometri atau bukan. Beri justifikasi bagi jawapan anda.

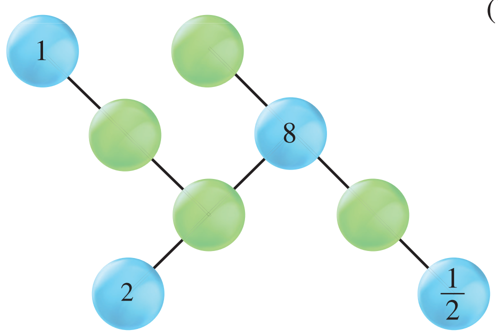
(a) $120, 40, \frac{40}{3}, \ldots$

(b) $0.03, 0.003, 0.0003, \ldots$

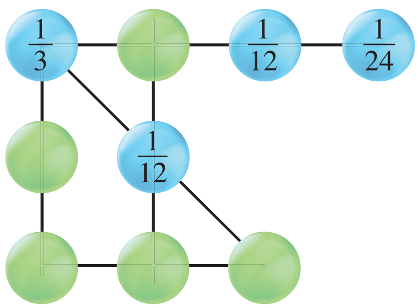
(c) $x + 1, 2x, 5x + 12, 12x, \ldots$

2. Lengkapkan jaringan nombor yang berikut, diberi hubungan bagi setiap jaringan ialah sebutan berturutan dalam janjang geometri.

(a)



(b)



3. Diberi $x - 2, x + 1, 4x + 4$ ialah tiga sebutan berturutan dalam suatu janjang geometri, nyatakan nilai x yang positif. Seterusnya, senaraikan tiga sebutan yang pertama itu dan nyatakan nisbah sepunya.

Menerbitkan rumus sebutan ke-*n*, T_n bagi janjang geometri

INKUIRI 5 Berkumpulan

Tujuan: Menerbitkan rumus sebutan ke-n, T_n bagi janjang geometri

Arahan:

1. Pertimbangkan suatu janjang geometri 2, 6, 18, 54, ... dengan sebutan pertama, a dan nisbah sepunya, r.
2. Bersama-sama ahli kumpulan, bincang dan lengkapkan jadual di bawah.

Sebutan	Nilai sebutan	Kaedah mendapatkan nilai sebutan	Rumus
T_1	2	$2(3)^{1-1} = 2(3)^0$	a
T_2	6	$2(3)^{2-1} = 2(3)^1$	$ar = ar^{2-1}$
T_3	18		
T_4	54		
T_5			
⋮	⋮	⋮	⋮
T_n			

3. Dapatkan satu rumus bagi sebutan ke-n janjang geometri.

Daripada Inkuiri 5, dapat diperhatikan bahawa nilai setiap sebutan dalam janjang geometri ini boleh diperoleh dengan menggunakan rumus berikut:

$$T_n = ar^{n-1}$$

Dengan a ialah sebutan pertama, r ialah nisbah sepunya dan n ialah bilangan sebutan.

Contoh 11

(a) Cari nisbah sepunya dan sebutan ke-5 bagi janjang geometri 4, –20, 100, –500, …

(b) Cari nisbah sepunya dan sebutan ke-7 bagi janjang geometri $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$

Penyelesaian

(a) Sebutan pertama, $a = 4$

Nisbah sepunya, $r = \frac{-20}{4} = -5$

$T_5 = 4(-5)^{5-1}$
$\quad = 2\ 500$

(b) Sebutan pertama, $a = 2$

Nisbah sepunya, $r = \frac{2}{3} \div 2 = \frac{1}{3}$

$T_7 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$
$\quad = \frac{2}{729}$

Contoh 12

Cari bilangan sebutan dalam janjang geometri $-\frac{25}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{9\ 375}$.

Penyelesaian

Sebutan pertama, $a = -\frac{25}{3}$, nisbah sepunya $r = \frac{5}{3} \div \left(-\frac{25}{3}\right) = -\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned}
T_n &= ar^{n-1} \\
\frac{1}{9\ 375} &= \left(-\frac{25}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\
-\frac{1}{78\ 125} &= \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\
\left(-\frac{1}{5}\right)^{7} &= \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\
7 &= n - 1 \\
n &= 8
\end{aligned}$$

Maka, bilangan sebutan ialah $n = 8$.

Contoh 13

Sebuah stadium terbuka mempunyai 20 buah kerusi pada baris pertama. Bilangan kerusi pada baris berikutnya adalah satu setengah kali bilangan kerusi pada baris sebelumnya.

(a) Hitung bilangan maksimum kerusi yang terdapat pada baris ke-10.

(b) Baris yang manakah mempunyai sekurang-kurangnya 505 buah kerusi?

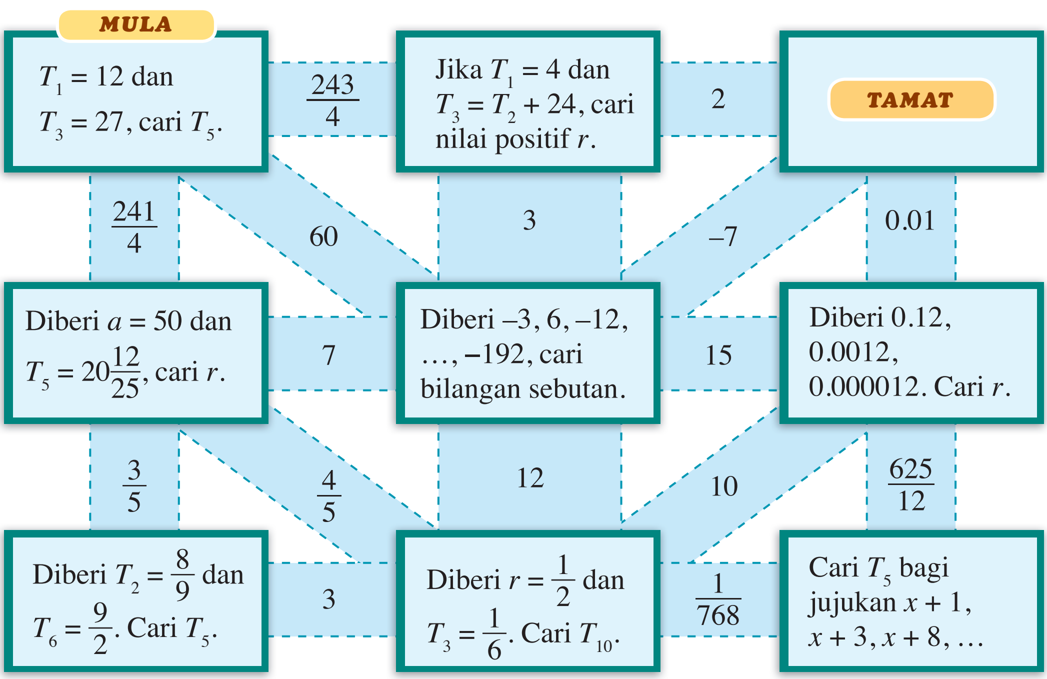
Penyelesaian

(a) Sebutan pertama, $a = 20$
Nisbah sepunya, $r = 1.5$
Jujukan dalam janjang geometri:
20, 30, 45, …
$T_{10} = 20(1.5)^9$
$= 768.9$
Maka, bilangan maksimum kerusi yang terdapat pada baris ke-10 ialah 768.

(b)
$$\begin{aligned}
20(1.5)^{n-1} &\geqslant 505\\
(1.5)^{n-1} &\geqslant \frac{505}{20}\\
(n-1)\log 1.5 &\geqslant \log \frac{505}{20}\\
n-1 &\geqslant \frac{\log \frac{505}{20}}{\log 1.5}\\
n &\geqslant 7.96 + 1\\
n &\geqslant 8.96
\end{aligned}$$
Maka, baris ke-9 mempunyai sekurang-kurangnya 505 buah kerusi.

Latih Diri 5.6

1. Cari jalan hingga ke petak TAMAT dengan memilih jawapan yang betul.



2. Rajah di sebelah menunjukkan sebiji bola yang dilantunkan ke lantai. Ketinggian lantunan bola yang paling besar ialah 3 m dan ketinggian setiap lantunan ialah sebanyak 95% daripada lantunan sebelumnya. Pada lantunan ke berapakah kali pertama ketinggiannya kurang daripada 1 m?

5.2.2

BAB 5

Menerbitkan rumus hasil tambah n sebutan pertama, S_n bagi janjang geometri

Pertimbangkan suatu janjang geometri dengan sebutan-sebutan berikut:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-2}, ar^{n-1}$$

Katakan hasil tambah n sebutan pertama ialah S_n.

Maka, $S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \ldots ①$

① × r: $rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n \quad \ldots ②$

A ① – ②:

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ -\,rS_n &= ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline S_n - rS_n &= a - ar^n \\ S_n(1 - r) &= a(1 - r^n) \\ S_n &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, r \neq 1 \end{aligned}$$

Semua sebutan di tengah-tengah antara a dan ar^n dihapuskan

Biasanya digunakan apabila $|r| < 1$

B Jika ② – ①:

$$\begin{aligned} rS_n - S_n &= ar^n - a \\ S_n(r - 1) &= a(r^n - 1) \\ S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r \neq 1 \end{aligned}$$

Biasanya digunakan apabila $|r| > 1$

TIP PINTAR

- $|r| < 1$ boleh ditulis sebagai $-1 < r < 1$.
- $|r| > 1$ boleh ditulis sebagai $r < -1$ dan $r > 1$.

Dalam suatu janjang geometri, sebutan ke-n boleh juga dihitung dengan menolak hasil tambah sebutan ke-n dengan hasil tambah sebutan ke-$(n - 1)$. Misalnya, diberi janjang geometri $1, -3, 9, -27, \ldots$ Sebutan ke-5 boleh dihitung dengan menolak hasil tambah lima sebutan pertama dengan hasil tambah empat sebutan pertama, iaitu $T_5 = S_5 - S_4$. Maka, rumus untuk mencari T_n dengan menggunakan hasil tambah sebutan boleh ditulis sebagai:

$$T_n = S_n - S_{n-1}$$

POKET MATEMATIK

1, 2, 4, … ialah suatu janjang geometri manakala 1 + 2 + 4 + … ialah suatu siri geometri.

Contoh 14

Diberi suatu siri geometri 1 + 5 + 25 + 125 + 625 + …
(a) Cari hasil tambah 10 sebutan pertama.
(b) Cari nilai n dengan keadaan $S_n = 3\,906$.

Penyelesaian

(a) Sebutan pertama, $a = 1$
Nisbah sepunya, $r = 5$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Guna rumus ini kerana $|r| > 1$

$$S_{10} = \frac{1(5^{10} - 1)}{5 - 1} = 2\,441\,406$$

(b)

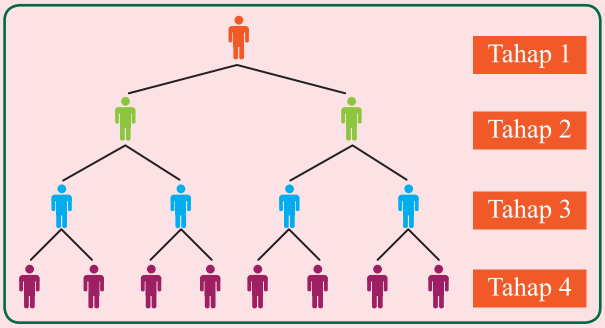
$$\begin{aligned} S_n &= 3\,906 \\ \frac{1(5^n - 1)}{5 - 1} &= 3\,906 \\ 5^n - 1 &= 15\,624 \\ 5^n &= 15\,625 \\ n \log 5 &= \log 15\,625 \\ n &= \frac{\log 15\,625}{\log 5} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Contoh 15

Sebuah syarikat produk kesihatan telah merancang satu strategi pemasaran. Setiap ahli perlu mempromosikan produk keluaran syarikat dengan mendapatkan dua orang ahli di bawahnya.

(a) Tunjukkan bahawa bilangan ahli bagi setiap tahap adalah suatu janjang geometri.

(b) Jika terdapat 9 tahap dalam suatu strategi pemasaran, cari jumlah ahli yang terlibat dalam mempromosikan produk itu.



Penyelesaian

(a) Bilangan ahli bagi setiap tahap boleh ditulis sebagai 1, 2, 4, 8, …

$r = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = 2$

Oleh sebab $r = 2$, maka bilangan ahli bagi setiap tahap adalah suatu janjang geometri.

(b) Apabila $n = 9$, $S_9 = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + T_9$

Gunakan $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$S_9 = \frac{1(2^9 - 1)}{2 - 1}$

$= 511$

Jumlah ahli yang terlibat dalam mempromosikan produk ialah 511 orang.

SUMBANG SARAN

Dengan menggunakan $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ dan $S_{n-1} = \frac{a(r^{n-1} - 1)}{r - 1}$, buktikan $T_n = ar^{n-1}$.

Latih Diri 5.7

1. Cari hasil tambah bagi setiap yang berikut.

(a) $0.02, 0.04, 0.08, \dots, T_{12}$

(b) $p, p^3, p^5, \dots, p^{21}$, dalam sebutan p

(c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \dots$ ke 15 sebutan yang pertama

2. Cari bilangan sebutan jika hasil tambah janjang geometri 3 500, 700, 140, … ialah 4 368.

3. Sekeping kertas berbentuk segi empat sama dipotong kepada 4 bahagian segi empat sama yang sama besar. Setiap bahagian itu dipotong lagi kepada 4 bahagian kecil segi empat sama yang sama besar. Proses ini diulang bagi setiap bahagian kecil segi empat sama itu.

(a) Tunjukkan bahawa bilangan segi empat sama yang dipotong membentuk suatu janjang geometri.

(b) Cari jumlah segi empat sama yang diperoleh jika proses itu diulang sebanyak 6 kali.

Menentukan hasil tambah ketakterhinggaan bagi janjang geometri

INKUIRI 6 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Menentukan hasil tambah ketakterhinggaan bagi janjang geometri

Arahan:

1. Pertimbangkan janjang geometri 64, 32, 16, ...
2. Lengkapkan jadual di sebelah bagi nilai r^n dan S_n.
3. Bincang bersama-sama ahli kumpulan tentang pemerhatian anda pada kedua-dua nilai ini apabila n semakin bertambah.
4. Buat satu kesimpulan bagi $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ apabila n bertambah hingga ketakterhinggaan. Seterusnya, ungkapkan S_∞ dalam sebutan a dan r.
5. Seorang daripada ahli kumpulan akan membentangkan hasil dapatan di hadapan kelas dan ahli daripada kumpulan lain akan bertanyakan soalan.
6. Kumpulan lain mengambil giliran untuk membuat pembentangan hasil dapatan.

n	r^n	S_n
1		
2		
3		
4		
5		
10		
20		
100		
200		

Hasil daripada Inkuiri 6, apabila nilai n semakin bertambah dan menghampiri ketakterhinggaan ($n \rightarrow \infty$), nilai r^n akan berkurang dan menghampiri sifar ($r^n \rightarrow 0$) manakala nilai S_n akan menghampiri $\dfrac{a}{1 - r}\left(S_n \rightarrow \dfrac{a}{1 - r}\right)$. Maka, hasil tambah ketakterhinggaan bagi suatu janjang geometri ialah:

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}, \text{ dengan } |r| < 1$$

Contoh 16

Cari hasil tambah ketakterhinggaan bagi janjang geometri 45, 9, 1.8, …

Penyelesaian

$$a = 45,\ r = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$$

$$S_\infty = \frac{45}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$= 56\frac{1}{4}$$

QR

Pembuktian Teorem Pythagoras menggunakan hasil tambah ketakterhinggaan bagi janjang geometri.

bit.ly/2vvOSRH

Contoh 17

Hasil tambah ketakterhinggaan bagi suatu janjang geometri ialah $31\frac{1}{2}$ dan hasil tambah dua sebutan yang pertama ialah 28. Cari nisbah sepunya.

Penyelesaian

$$S_\infty = 31\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{63}{2}$$

$$a = \frac{63}{2}(1-r) \quad \ldots ①$$

$$a + ar = 28$$

$$a(1+r) = 28 \quad \ldots ②$$

② ÷ ①, $\dfrac{a(1+r)}{a} = \dfrac{28}{\frac{63}{2}(1-r)}$

$$(1+r)(1-r) = \frac{8}{9}$$

$$1 - r^2 = \frac{8}{9}$$

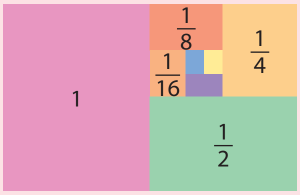
$$r^2 = \frac{1}{9}$$

$$r = \frac{1}{3} \quad \text{atau} \quad r = -\frac{1}{3}$$

Cabar Minda

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$

Lihat rajah di bawah dan buat kesimpulan anda.



Gunakan rajah yang serupa dan buktikan

$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 4.$

Contoh 18

Ungkapkan perpuluhan berulang 0.56363… dalam bentuk hasil tambah ketakterhinggaan bagi suatu janjang geometri. Seterusnya, ungkapkan nombor itu dalam pecahan termudah.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} 0.56363\ldots &= 0.5 + 0.063 + 0.00063 + 0.0000063 + \ldots \\ &= 0.5 + (0.063 + 0.00063 + 0.0000063 + \ldots) \\ &= 0.5 + S_\infty \\ &= \frac{1}{2} + \frac{0.063}{1 - 0.01} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{7}{110} \\ &= \frac{31}{55} \end{aligned}$$

POKET MATEMATIK

Perpuluhan berulang seperti 0.56363… boleh ditulis sebagai $0.5\dot{6}\dot{3}$.

TIP PINTAR

0.063 + 0.00063 + 0.0000063 + … merupakan siri geometri dengan $a = 0.063$ dan $r = 0.01$.

BAB 5

Latih Diri 5.8

1. Lengkapkan teka silang kata berikut.

Melintang:

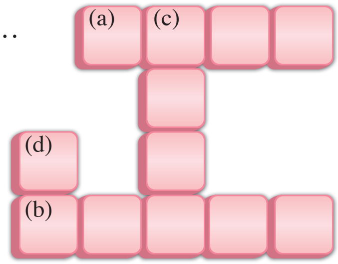
(a) Cari hasil tambah ketakterhinggaan bagi 1 500, 500, $166\frac{2}{3}$, …

(b) Wilson membuat pinjaman sebanyak RM15 000 untuk membeli sebuah motosikal. Setiap tahun, dia berjaya mengurangkan jumlah pinjamannya sebanyak 50%. Cari jumlah pembayaran maksimum Wilson untuk pinjaman itu.

Menegak:

(c) Diberi hasil tambah ketakterhinggaan ialah 4 480 dan nisbah sepunya ialah $\frac{1}{2}$, cari sebutan pertama janjang geometri ini.

(d) 4.818181… boleh ditulis dalam bentuk $\frac{h}{11}$, cari nilai h.



Menyelesaikan masalah melibatkan janjang geometri

Contoh 19

Sebuah syarikat telekomunikasi berjaya menjual sebanyak 0.5 juta buah telefon pintar pada tahun 2015. Setiap tahun, jualan telefon pintar syarikat tersebut meningkat sebanyak 4%.

(a) Cari jumlah telefon pintar yang dijual dari tahun 2015 hingga tahun 2020.

(b) Jika 33% daripada telefon pintar yang dijual dari tahun 2017 hingga tahun 2020 bersaiz 5 inci dan 14% bersaiz 6 inci, hitung jumlah telefon pintar yang bersaiz 5 inci dan 6 inci.

Penyelesaian

(a) Janjang geometri (dalam juta): $0.5, 0.5(1.04), 0.5(1.04)^2, \ldots$

$a = 0.5$ juta, $r = 1.04$

$$S_6 = \frac{0.5(1.04^6 - 1)}{1.04 - 1}$$
$$= 3.316 \text{ juta}$$

(b) Jumlah telefon pintar dari tahun 2017 hingga tahun 2020:

$$S_6 - S_2 = \frac{0.5(1.04^6 - 1)}{1.04 - 1} - \frac{0.5(1.04^2 - 1)}{1.04 - 1}$$
$$= 3.316 \text{ juta} - 1.02 \text{ juta}$$
$$= 2.296 \text{ juta}$$

Bilangan telefon pintar bersaiz 5 inci:

$$\frac{33}{100} \times 2.296 \text{ juta} = 0.758 \text{ juta}$$

Bilangan telefon pintar bersaiz 6 inci:

$$\frac{14}{100} \times 2.296 \text{ juta} = 0.321 \text{ juta}$$

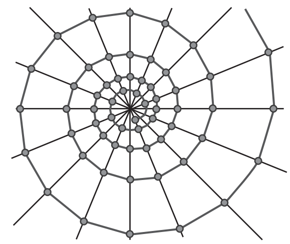
Jumlah telefon pintar = 0.758 juta + 0.321 juta
= 1.079 juta

Maka, jumlah telefon pintar bersaiz 5 inci dan 6 inci yang dijual ialah 1.079 juta.

Latih Diri 5.9

1. Seutas dawai dipotong kepada beberapa bahagian dengan $10x$ cm, $(4x + 20)$ cm dan $(3x - 10)$ cm ialah tiga bahagian yang berturutan bagi suatu janjang geometri.
   (a) Cari bahagian terpanjang jika $10x$ ialah sebutan kedua terpanjang.
   (b) Jika dawai itu dipotong kepada bilangan bahagian yang tak terhingga, cari panjang maksimum dawai, dalam m.

2. Rajah di sebelah menunjukkan corak berbentuk sarang labah-labah. Lilitan bagi setiap semibulatan adalah mengikut janjang geometri dengan jejari semibulatan terkecil ialah j cm dan setiap jejari berikutnya bertambah sebanyak 40%.
   (a) Bentukkan tiga sebutan pertama bagi lilitan semibulatan itu dalam sebutan j.
   (b) Cari jumlah panjang lilitan, dalam m, bagi corak sarang labah-labah itu yang mempunyai 15 semibulatan dan jejari 2 cm.



Latihan Intensif 5.2

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2RBo9zl untuk kuiz

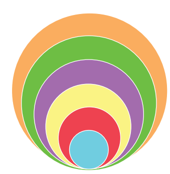
1. Hitung bilangan sebutan dan hasil tambah bagi setiap janjang geometri yang berikut.
   (a) $-1, 3, -9, \ldots, 2187$
   (b) $\log x^{-1}, \log x^{-2}, \log x^{-4}, \ldots, \log x^{-64}$
   (c) $0.54, 0.0054, 0.000054, \ldots\ 5.4 \times 10^{-17}$
   (d) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots\ \frac{3}{64}$

2. Diberi janjang geometri $4.5, -9, 18, \ldots$ Cari bilangan sebutan bagi janjang geometri ini supaya hasil tambahnya ialah 769.5.

3. Tiga sebutan berturutan bagi suatu janjang geometri ialah x, $2x + 3$ dan $10x - 3$. Cari
   (a) semua nilai yang mungkin bagi x,
   (b) sebutan keenam jika $x < 0$.

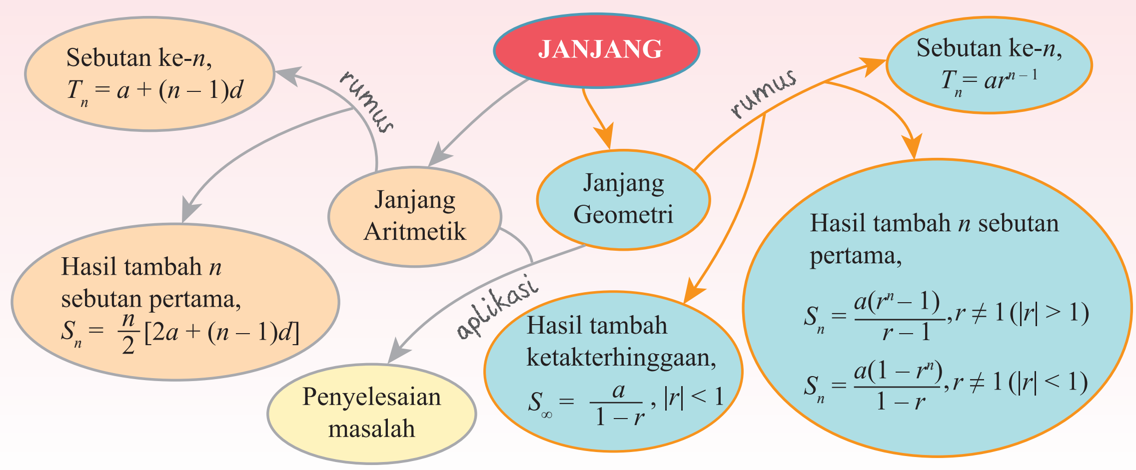
4. Rajah menunjukkan beberapa segi tiga. Didapati luas segi tiga itu mengikut janjang geometri dengan luas segi tiga ketiga ialah 36 cm^2 dan hasil tambah luas segi tiga ketiga dan keempat ialah 54 cm^2. Cari
   (a) nisbah sepunya dan luas segi tiga pertama,
   (b) hasil tambah luas segi tiga ketiga hingga segi tiga kesepuluh.

5. Rajah menunjukkan beberapa bulatan sepusat. Lilitan bagi setiap bulatan sepusat berturutan itu mengikut janjang geometri. Diberi lilitan ke-n ialah $T_n = 3^{8-n}$ cm, cari
   (a) nisbah sepunya,
   (b) hasil tambah tiga lilitan berturutan selepas lilitan kedua terbesar.



6. Terdapat tiga orang kanak-kanak dengan jisim mereka disusun secara menurun mengikut janjang geometri. Hasil tambah jisim ketiga-tiga mereka adalah tujuh kali jisim kanak-kanak yang paling ringan. Cari nisbah sepunya dan jisim kanak-kanak kedua terbesar jika jisim kanak-kanak yang paling besar ialah 14.5 kg.

RUMUSAN BAB 5



TULIS JURNAL ANDA

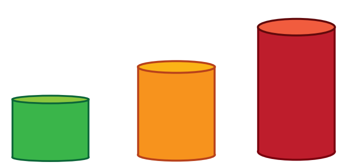
Bina satu info grafik berkaitan perbezaan antara janjang aritmetik dengan janjang geometri. Kemudian, fikirkan satu situasi dalam kehidupan harian anda yang mengaplikasikan kedua-dua janjang ini dan selesaikannya.

LATIHAN PENGUKUHAN

1. $-2x - 1$, $3x + 2$ dan $9x + 3$ ialah tiga sebutan berturutan bagi janjang aritmetik. Cari TP1
   (a) beza sepunya,
   (b) sebutan pertama jika $3x + 2$ ialah sebutan ketiga.

2. Sebutan ke-9 suatu janjang aritmetik ialah $21 + 3p$ dan hasil tambah tiga sebutan pertama ialah $9p$. Cari beza sepunya. TP2

3. Rajah menunjukkan tiga buah silinder dengan keadaan isi padu setiap silinder disusun mengikut janjang aritmetik. Hasil tambah isi padu silinder pertama dan silinder ketiga ialah 24 cm^3 dan isi padu silinder kelima ialah 36 cm^3. TP3



   (a) Cari isi padu silinder terkecil.
   (b) Hitung hasil tambah isi padu bagi 9 buah silinder yang pertama.

4. Sebutan ke-3 bagi suatu janjang geometri ialah 30 dan hasil tambah sebutan ke-3 dan ke-4 ialah 45. Cari TP2
   (a) sebutan pertama dan nisbah sepunya,
   (b) hasil tambah ketakterhinggaan.

5. Rajah menunjukkan susunan beberapa buah kerusi. Tinggi setiap kerusi ialah 80 cm. Apabila kerusi disusun, terdapat ruang sebanyak 4 cm antara dua buah kerusi. Kerusi-kerusi ini akan disimpan di dalam sebuah stor. TP4
(a) Cari bilangan kerusi maksimum yang boleh disusun jika tinggi stor ialah 3 m.
(b) 13 susunan kerusi akan disimpan di dalam stor itu dengan keadaan susunan kerusi pertama mempunyai bilangan kerusi maksimum dan bilangan kerusi bagi setiap susunan seterusnya berkurang sebanyak 2. Hitung jumlah kerusi yang disimpan di dalam stor itu.

6. Encik Muslim mula menyimpan RM14 000 ke dalam akaun bank anaknya yang baru lahir. Bank itu menawarkan faedah sebanyak 5% setahun. Encik Muslim berharap simpanan untuk anaknya akan mencapai RM30 000 apabila anaknya berumur 18 tahun. TP4
(a) Adakah simpanan sebanyak RM30 000 dapat dicapai apabila anaknya berumur 18 tahun? Tunjukkan jalan pengiraan.
(b) Jika selepas 10 tahun faedah berkurang menjadi 3% setahun, hitung jumlah simpanan ketika anak Encik Muslim berumur 18 tahun. Adakah wang simpanan bagi anak Encik Muslim mencapai RM30 000?

7. Shahrul mempunyai koleksi kereta mainan yang dikumpulkan pada setiap bulan. Bilangan kereta mainannya bertambah pada setiap bulan mengikut janjang geometri. Jumlah kereta mainannya pada empat bulan pertama ialah sepuluh kali jumlah kereta mainan pada dua bulan pertama. TP5
(a) Jika r mewakili nisbah sepunya, tunjukkan bahawa $r^4 - 10r^2 + 9 = 0$. Seterusnya, cari nilai positif r.
(b) Hitung perbelanjaan yang dikeluarkan oleh Shahrul dalam masa 6 bulan itu jika dia mula membeli 2 buah kereta mainan dan purata harga sebuah kereta ialah RM7.50.

Penerokaan MATEMATIK

1. Sediakan dua buah tabung.
2. Dalam masa 10 hari, masukkan wang ke dalam tabung itu mengikut syarat berikut:

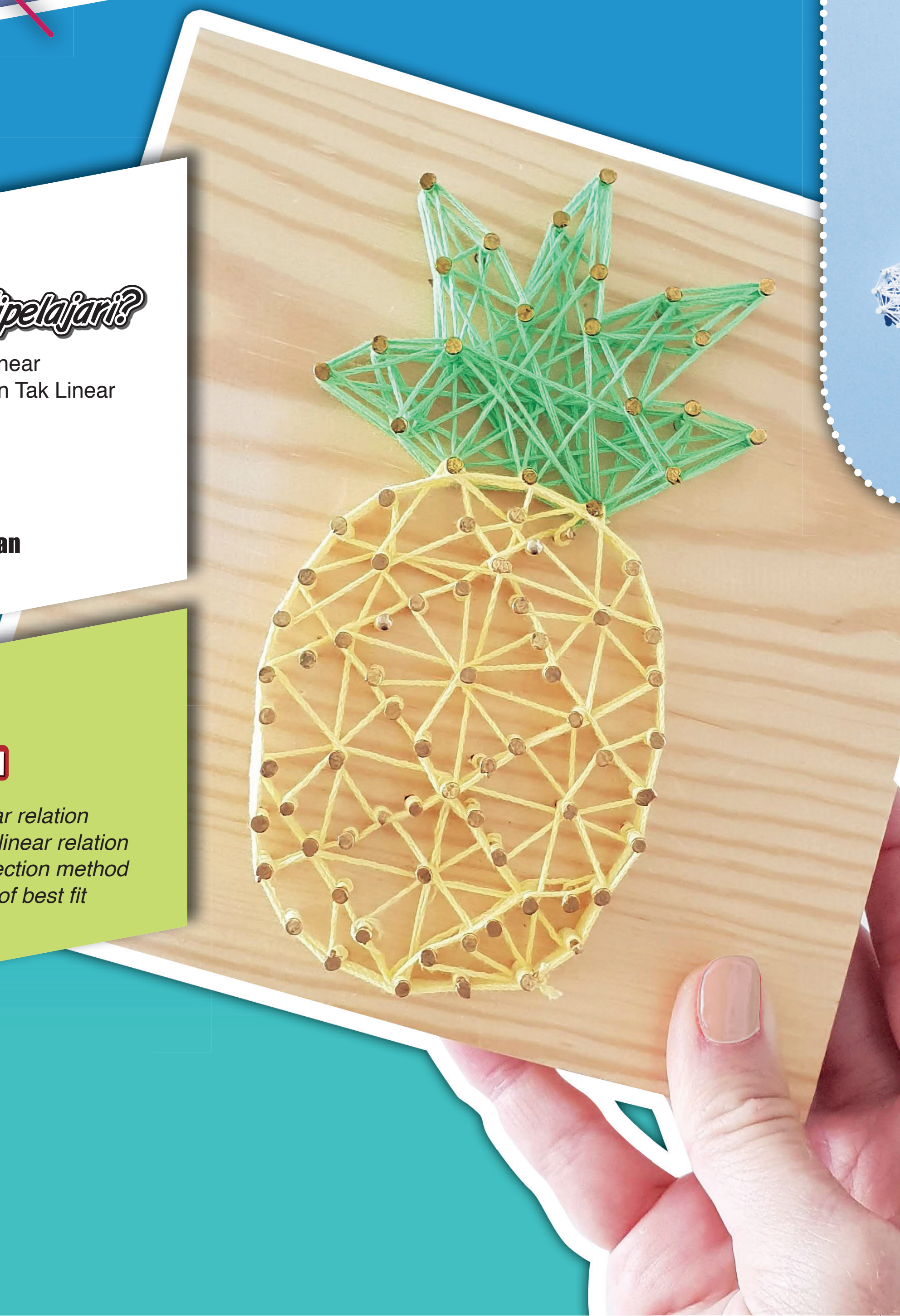
> Tabung pertama:
> Mula masukkan 50 sen ke dalam tabung pada hari pertama, RM1 pada hari kedua, RM1.50 sen pada hari ketiga dan seterusnya. Setiap hari, jumlah wang yang disimpan melebihi 50 sen dari hari sebelumnya.

> Tabung kedua:
> Mula masukkan 10 sen ke dalam tabung pada hari pertama, 20 sen pada hari kedua, 40 sen pada hari ketiga dan seterusnya. Jumlah wang yang disimpan setiap hari adalah dua kali jumlah wang pada hari sebelumnya.

3. Catatkan jumlah simpanan anda selepas 10 hari.
4. Perhatikan perkaitan antara jumlah simpanan anda dengan jenis janjang.
5. Sediakan satu laporan tentang perkaitan antara janjang aritmetik dan janjang geometri dengan jumlah wang simpanan anda.

BAB 5

BAB 6 Hukum Linear



Apakah yang akan dipelajari?

- Hubungan Linear dan Tak Linear
- Hukum Linear dan Hubungan Tak Linear
- Aplikasi Hukum Linear

Senarai Standard Pembelajaran

bit.ly/2FgAMdd

KATA KUNCI

Hubungan linear	*Linear relation*
Hubungan tak linear	*Non-linear relation*
Kaedah pemerinyuan	*Inspection method*
Garis lurus penyuaian terbaik	*Line of best fit*

String art merupakan sejenis seni yang menggunakan benang atau tali untuk membentuk corak geometri. *String art* mengaplikasikan penggunaan garis lurus untuk membentuk corak yang bukan berbentuk garis lurus.

Tahukah Anda?

Leonardo Bonacci atau dikenali sebagai Fibonacci ialah seorang ahli matematik tersohor di Itali ketika abad ke-13. Beliau telah menemukan suatu konsep bahawa nisbah jarak antara hujung hidung ke hujung dagu dan dari bibir ke hujung dagu memberikan satu nilai yang dikenali sebagai Nisbah Emas (*The Golden Ratio*). Nisbah bacaan boleh diukur dan diwakilkan melalui graf garis lurus yang melibatkan dua pemboleh ubah.

Untuk maklumat lanjut:

bit.ly/2XTmfdd

SIGNIFIKAN BAB INI

Bagi menghubungkan dua pemboleh ubah, garis lurus dapat membantu kita untuk mendapatkan nilai suatu pemalar. Apabila suatu garis dilukis hasil daripada suatu eksperimen, data yang diperoleh kadangkala tidak menghasilkan garis lurus yang sempurna. Oleh itu, data tersebut akan diwakilkan dengan garis lurus penyuaian terbaik.

Imbas kod *QR* ini untuk menonton video cara membuat *string art*.

bit.ly/2TWUXAY

6.1 Hubungan Linear dan Tak Linear

Membezakan hubungan linear dan tak linear

INKUIRI 1 Berpasangan

Tujuan: Membezakan hubungan linear dan tak linear berdasarkan jadual data dan graf
Arahan:
1. Lengkapkan jadual berdasarkan persamaan yang diberikan.
   (a) $y = 2x^2 - 5x + 8$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y								

   (b) $y = x + 4$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y								

2. Lukis graf y melawan x berdasarkan nilai-nilai yang diperoleh dalam kedua-dua jadual untuk setiap persamaan.
3. Berdasarkan graf yang dilukis, bandingkan bentuk graf untuk kedua-dua persamaan. Apakah yang dapat anda perhatikan?

Hasil daripada Inkuiri 1, dapat disimpulkan bahawa:

> Graf yang membentuk satu garis lurus adalah suatu hubungan linear manakala graf yang tidak membentuk garis lurus adalah suatu hubungan tak linear.

Graf linear boleh diperoleh daripada graf tak linear apabila pemboleh ubah pada paksi-X atau paksi-Y atau kedua-duanya sekali ditukar.

IMBAS KEMBALI

Bagi graf linear, $Y = mX + c$, X mewakili pemboleh ubah pada paksi mengufuk, Y mewakili pemboleh ubah pada paksi mencancang, m mewakili kecerunan dan c mewakili pintasan-Y.

Contoh 1

Lukis graf Y melawan X berdasarkan setiap jadual data yang berikut dan seterusnya tentukan graf yang manakah adalah graf hubungan linear? Berikan alasan anda.

(a)

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-17	0	5	4	3	8	25

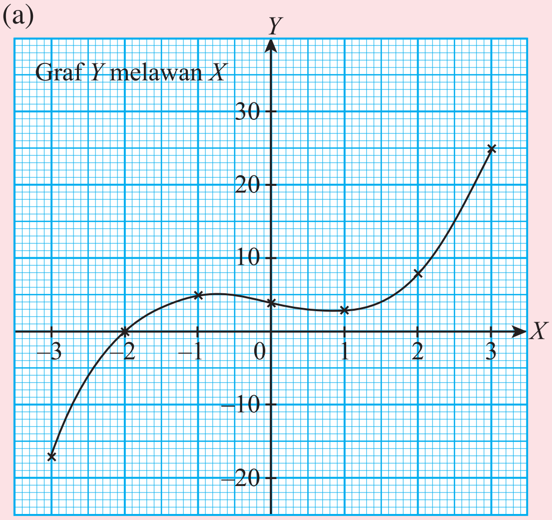
(b)

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	7	5	3	1	-1	-3

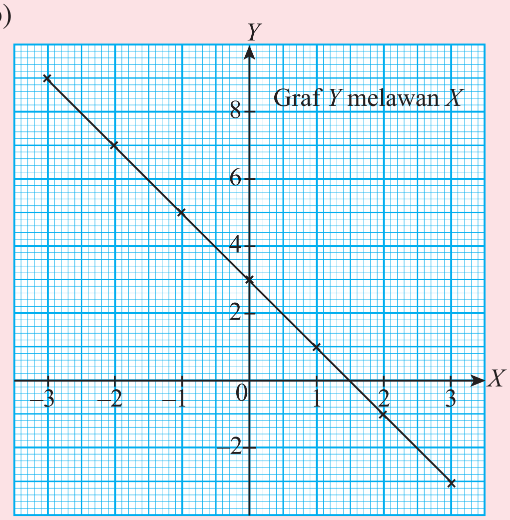
6.1.1

Penyelesaian

(a)



(b)



Graf (a) ialah graf hubungan tak linear kerana graf yang diperoleh merupakan satu lengkung.
Graf (b) ialah graf hubungan linear kerana graf yang diperoleh merupakan satu garis lurus.

Latih Diri 6.1

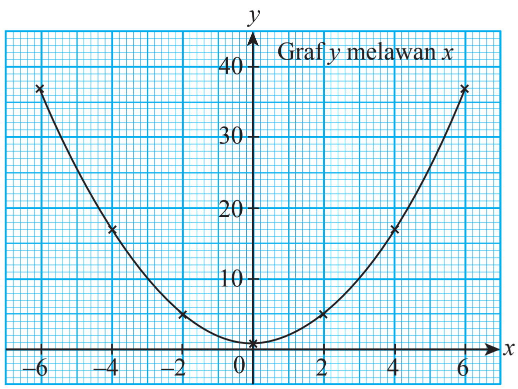
1. Rajah di bawah menunjukkan dua graf yang diplot menggunakan nilai-nilai yang diberikan dalam jadual masing-masing dengan persamaan $y = x^2 + 1$. Rajah yang manakah menunjukkan graf hubungan linear? Nyatakan alasan anda.

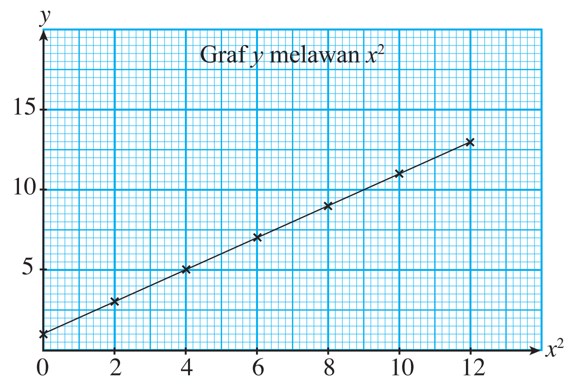
(a)

x	–6	–4	–2	0	2	4	6
y	37	17	5	1	5	17	37

(b)

x^2	0	2	4	6	8	10	12
y	1	3	5	7	9	11	13





2. Lukis graf Y melawan X berdasarkan nilai-nilai yang diberikan dalam jadual berikut.

(a)

X	1	3	5	7	9	11
Y	3.16	5.50	9.12	16.22	28.84	46.77

(b)

X	2	4	6	10	12	14
Y	0.5	0.7	0.9	1.3	1.5	1.7

Graf yang manakah menunjukkan graf hubungan linear? Nyatakan alasan anda.

6.1.1

BAB 6

Melukis garis lurus penyuaian terbaik bagi graf hubungan linear

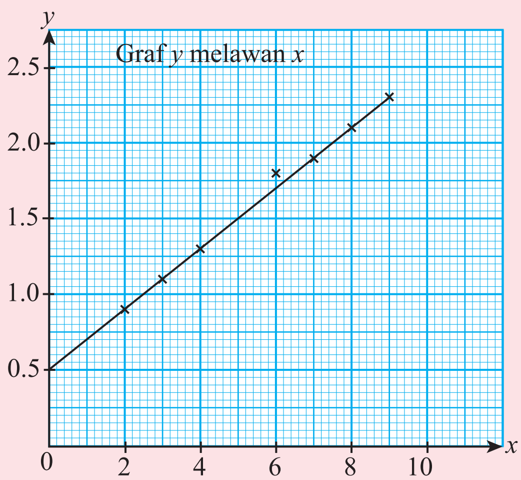
Garis lurus penyuaian terbaik ialah garis lurus yang menyambungkan kebanyakan titik yang diplotkan pada graf. Titik-titik yang tidak terletak pada garis lurus penyuaian terbaik itu mesti bertaburan secara seimbang di kedua-dua belah garis lurus itu.

Contoh 2

Jadual di sebelah menunjukkan nilai-nilai yang diperoleh daripada suatu eksperimen yang melibatkan dua pemboleh ubah, x dan y. Plot graf y melawan x, dengan menggunakan skala yang sesuai bagi paksi-x dan paksi-y. Seterusnya, lukiskan garis lurus penyuaian terbaik.

x	2	3	4	6	7	8	9
y	0.9	1.1	1.3	1.8	1.9	2.1	2.3

Penyelesaian



INKUIRI 2 Berpasangan PAK-21

Tujuan: Melukis garis lurus penyuaian terbaik menggunakan teknologi digital

Arahan:

1. Lukis graf garis lurus berdasarkan nilai data berikut.

x	1	2	3	4	6	7
y	3	5	6	8	10	11

2. Kemudian, masukkan nilai-nilai pada jadual yang disediakan dalam perisian Desmos dengan menggunakan nilai-nilai data yang sama seperti dalam jadual di atas.
3. Ikuti langkah-langkah bergambar untuk melukis garis lurus penyuaian terbaik dengan mengimbas kod *QR* di sebelah.
4. Bandingkan graf garis lurus penyuaian terbaik yang diperoleh dalam perisian Desmos dengan graf yang dilukis.

QR

Langkah-langkah melukis garis lurus penyuaian terbaik menggunakan aplikasi Desmos.

bit.ly/2Va8CcW

BAB 6

Hasil daripada Inkuiri 2, dapat diperhatikan bahawa:

Graf lurus yang didapati daripada graf yang dilukis adalah sama dengan garis lurus yang dilukis menggunakan perisian Desmos. Garis tersebut ialah garis lurus penyuaian terbaik.

Latih Diri 6.2

1. Jadual berikut menunjukkan nilai-nilai yang diperoleh daripada suatu eksperimen yang melibatkan dua pemboleh ubah, x dan y.

x	5	10	15	20	25	30
y	8	14.5	18	23	26.5	33

Plot graf y melawan x, dengan menggunakan skala yang sesuai bagi paksi-x dan paksi-y. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.

2. Satu eksperimen dijalankan untuk menentukan hubungan antara pemanjangan spring, L dengan jisim beban, m yang digantung pada hujung spring itu. Jadual berikut menunjukkan hasil eksperimen yang diperoleh.

m (g)	20	40	60	80	100	120
L (cm)	0.65	1.25	1.80	2.40	2.95	3.55

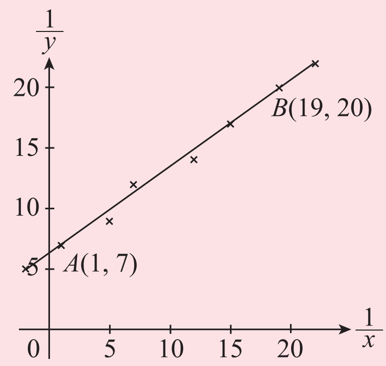
Plot graf L melawan m, dengan menggunakan skala yang sesuai pada paksi-m dan paksi-L. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.

Membentuk persamaan bagi garis lurus penyuaian terbaik

Persamaan garis lurus boleh ditulis dalam bentuk $Y = mX + c$, jika kecerunan, m dan pintasan-Y, c, diketahui atau boleh ditentukan dengan menggunakan sebarang dua titik yang terletak pada garis lurus tersebut.

Contoh 3

Graf di bawah menunjukkan sebahagian daripada garis lurus yang diperoleh dengan memplot $\frac{1}{y}$ melawan $\frac{1}{x}$. Ungkapkan y dalam sebutan x.



Penyelesaian

Kecerunan, $m = \dfrac{20 - 7}{19 - 1}$

$= \dfrac{13}{18}$

$Y = mX + c$

$\dfrac{1}{y} = m\left(\dfrac{1}{x}\right) + c$

$20 = \left(\dfrac{13}{18}\right)(19) + c$

$c = \dfrac{113}{18} \leftarrow$ Pintasan-y

Maka, $\dfrac{1}{y} = \dfrac{13}{18}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{113}{18} \leftarrow$ Persamaan garis lurus

$y = \dfrac{18x}{13 + 113x}$

Contoh 4

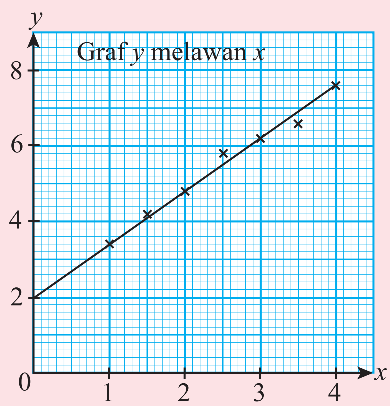
Jadual berikut menunjukkan nilai-nilai eksperimen bagi dua pemboleh ubah, x dan y.

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y	3.4	4.2	4.8	5.8	6.2	6.6	7.6

(a) Plot graf y melawan x, dengan menggunakan skala 1 cm kepada 1 unit pada paksi-x dan 1 cm kepada 2 unit pada paksi-y. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.
(b) Daripada graf, cari pintasan-y dan kecerunan garis lurus penyuaian terbaik itu.
(c) Tentukan persamaan garis lurus penyuaian terbaik itu.

Penyelesaian

(a)



(b) Daripada graf, pintasan-y, $c = 2$

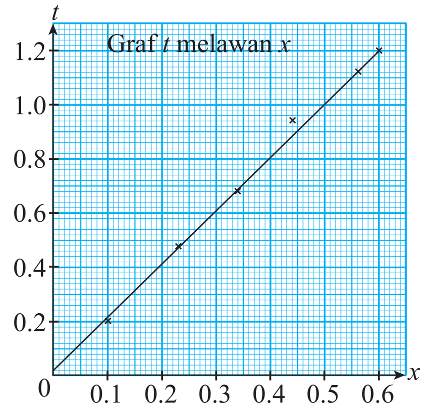
kecerunan, $m = \dfrac{7.6 - 2}{4 - 0}$

$= 1.4$

(c) Persamaan garis lurus penyuaian terbaik ialah $y = 1.4x + 2$.

Latih Diri 6.3

1. Graf garis lurus penyuaian terbaik dalam rajah di sebelah menunjukkan nilai-nilai yang diperoleh daripada suatu eksperimen yang melibatkan dua pemboleh ubah, x dan t. Ungkapkan t dalam sebutan x.



2. Jadual berikut menunjukkan nilai-nilai eksperimen bagi dua pemboleh ubah, x dan y.

x	10	20	30	40	50	60
y	16.5	20.0	23.5	27.5	31.5	35.0

(a) Plot graf y melawan x, dengan menggunakan skala 2 cm kepada 10 unit pada paksi-x dan 2 cm kepada 5 unit pada paksi-y. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.
(b) Daripada graf, cari pintasan-y dan kecerunan garis lurus penyuaian terbaik itu.
(c) Tentukan persamaan garis lurus penyuaian terbaik itu.

Mentafsir maklumat berdasarkan garis lurus penyuaian terbaik

Berdasarkan garis lurus penyuaian terbaik, anda boleh membuat ramalan bagi nilai pemboleh ubah x atau y yang tidak terdapat dalam eksperimen tanpa perlu mengulangi eksperimen tersebut. Jika nilai pemboleh ubah x atau y berada di luar julat titik-titik, anda boleh mencari nilai pemboleh ubah itu dengan memanjangkan garis lurus yang dilukis atau menentukannya dengan membentuk persamaan bagi garis lurus itu.

Contoh 5

Jadual berikut menunjukkan data bagi dua pemboleh ubah, x dan $\log_{10} y$ yang diperoleh daripada suatu eksperimen.

x	0.1	0.3	0.4	0.7	0.8	1.0
$\log_{10} y$	0.40	0.80	1.04	1.60	1.78	2.20

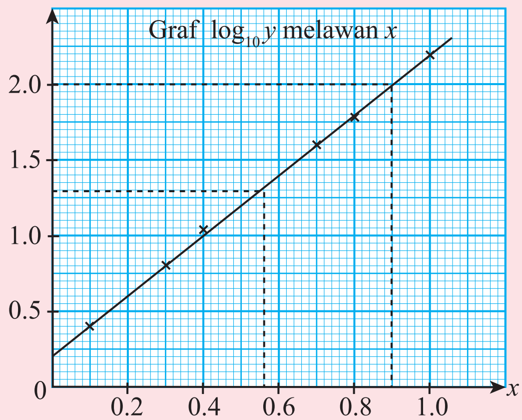
(a) Plot $\log_{10} y$ melawan x, dengan menggunakan skala 1 cm kepada 0.2 unit pada paksi-x dan 1 cm kepada 0.5 unit pada paksi-$\log_{10} y$. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.
(b) Daripada graf, cari nilai
  (i) $\log_{10} y$ apabila $x = 0.9$,
  (ii) y apabila $x = 0$,
  (iii) x apabila $\log_{10} y = 2$,
  (iv) x apabila $y = 20$.
(c) Cari persamaan garis lurus penyuaian terbaik itu.

6.1.3 6.1.4

BAB 6

Penyelesaian

(a)



(b) (i) Daripada graf, apabila $x = 0.9$, $\log_{10} y = 2$.

(ii) Daripada graf, apabila $x = 0$,

$\log_{10} y = 0.2$

$y = 10^{0.2}$

$y = 1.585$

(iii) Daripada graf, apabila $\log_{10} y = 2$, $x = 0.9$.

(iv) Daripada graf, apabila $y = 20$, $\log_{10} 20 = 1.3$.

Maka, $x = 0.56$.

(c) Dua titik dipilih daripada graf, iaitu (0.7, 1.60) dan (0.3, 0.80).

Kecerunan, $m = \dfrac{1.60 - 0.80}{0.7 - 0.3}$

$= 2$

Pintasan-Y ialah 0.2.

Maka, persamaan garis lurus penyuaian terbaik ialah

$\log_{10} y = 2x + 0.2$.

POKET MATEMATIK

- **Kecerunan** ialah kadar perubahan satu pemboleh ubah terhadap pemboleh ubah yang lain.
- **Pintasan-*y*** ialah koordinat-*y* bagi titik persilangan suatu garis lurus dengan paksi-*y*.

Latih Diri 6.4

1. Jadual berikut menunjukkan nilai-nilai bagi x dan y hasil daripada suatu eksperimen.

x	1	2	4	6	8	10	15
y	5.5	7.0	10.5	13.0	15.5	19.0	26.5

(a) Plot y melawan x, dengan menggunakan skala 2 cm kepada 2 unit pada paksi-x dan 2 cm kepada 5 unit pada paksi-y. Seterusnya, lukis satu garis lurus penyuaian terbaik.

(b) Daripada graf, cari

(i) pintasan-y,

(ii) nilai y apabila $x = 12$,

(iii) kecerunan,

(iv) nilai x apabila $y = 15$,

(c) Cari persamaan garis lurus penyuaian terbaik itu. Seterusnya, hitung nilai y apabila $x = 28$.

Latihan Intensif 6.1

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2K9pKZ4 untuk kuiz

1. Jadual di bawah menunjukkan data bagi eksperimen yang melibatkan pemboleh ubah x dan y.

(a)

x	-4	-2	-1	0	1	2
y	3	-3	-3	-1	3	9

(b)

$\frac{1}{x}$	0.80	0.70	0.50	0.40	0.25	0.20
y^2	4.00	4.41	5.20	5.62	6.20	6.40

Lukis graf berdasarkan data dalam jadual. Kemudian, tentukan graf yang menunjukkan hubungan linear dan hubungan tak linear. Beri alasan bagi jawapan anda.

2. Berdasarkan satu eksperimen, nilai X dan nilai Y dihubungkan seperti di dalam jadual berikut.

X	20	30	40	50	60	70
Y	108.0	110.4	112.4	114.4	116.8	119.0

Plot graf Y melawan X dan lukis garis lurus penyuaian terbaik. Kemudian, tuliskan persamaan bagi garis lurus penyuaian terbaik itu.

3. Jadual berikut menunjukkan nilai-nilai bacaan bagi dua pemboleh ubah, $\log_{10}(x + 1)$ dan $\log_{10} y$.

$\log_{10}(x + 1)$	0.18	0.30	0.50	0.60	0.70	0.78
$\log_{10} y$	0.33	0.45	0.64	0.75	0.85	0.93

(a) Plot graf $\log_{10} y$ melawan $\log_{10}(x + 1)$, dengan menggunakan skala 2 cm kepada 0.1 unit pada paksi-$\log_{10}(x + 1)$ dan paksi-$\log_{10} y$. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.

(b) Daripada graf, cari
- (i) kecerunan,
- (ii) pintasan-$\log_{10} y$,
- (iii) nilai x apabila $\log_{10} y = 0.55$,

(c) Hitung
- (i) nilai y apabila $x = 2.5$,
- (ii) nilai x apabila $y = 1.5$.

4. Hasil eksperimen bagi dua pemboleh ubah, x^2 dan xy, ditunjukkan dalam jadual berikut.

x^2	5	9	16	25	36	42
xy	12	15.5	22	30	40	45

(a) Plot graf xy melawan x^2, dengan menggunakan skala 2 cm kepada 5 unit pada paksi-X dan paksi-Y. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.

(b) Daripada graf, cari
- (i) kecerunan,
- (ii) pintasan-Y,
- (iii) nilai x^2 apabila $xy = 16.5$,
- (iv) nilai y apabila $x = 2.5$.

(c) Hitung nilai x apabila $xy = 100$.

6.2 Hukum Linear dan Hubungan Tak Linear

Mengaplikasikan hukum linear kepada hubungan tak linear

Dengan penggunaan hukum linear, kebanyakan hubungan tak linear boleh ditukarkan kepada hubungan linear supaya satu graf garis lurus dapat dilukis. Daripada graf garis lurus, maklumat dapat diperoleh dengan lebih mudah berbanding graf lengkung.

Persamaan tak linear $y = ax + \frac{b}{x}$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar boleh ditukar kepada bentuk persamaan linear $Y = mX + c$ dengan dua kaedah.

Kaedah 1

$y = ax + \frac{b}{x}$

$y(x) = ax(x) + \frac{b}{x}(x)$ ← Darab kedua-dua belah persamaan dengan x

$yx = ax^2 + b$

$xy = ax^2 + b$ ← Bandingkan dengan $Y = mX + c$

Melalui perbandingan, $Y = xy$, $X = x^2$, $m = a$ dan $c = b$.

Y	m	X	c
xy	a	x^2	b

Kaedah 2

$y = ax + \frac{b}{x}$

$\frac{y}{x} = \frac{b}{x^2} + \frac{ax}{x}$ ← Bahagi kedua-dua belah persamaan dengan x

$\frac{y}{x} = b\left(\frac{1}{x^2}\right) + a$ ← Bandingkan dengan $Y = mX + c$

Melalui perbandingan, $Y = \frac{y}{x}$, $X = \frac{1}{x^2}$, $m = b$ dan $c = a$.

Y	m	X	c
$\frac{y}{x}$	b	$\frac{1}{x^2}$	a

TIP PINTAR

Anda perlu memilih pemboleh ubah yang sesuai bagi X dan Y untuk menukarkan persamaan tak linear kepada bentuk linear, $Y = mX + c$ dengan m ialah kecerunan garis lurus dan c ialah pintasan-y. Pemboleh ubah X dan Y mesti mengandungi hanya pemboleh ubah dan tidak boleh mengandungi pemalar yang belum diketahui. m dan c pula mesti mengandungi hanya pemalar.

Contoh 6

Tukar persamaan $y = pq^x$ dengan keadaan p dan q ialah pemalar kepada bentuk linear $Y = mX + c$. Seterusnya, kenal pasti Y, X, m dan c.

Penyelesaian

$y = pq^x$

$\log_{10} y = \log_{10} p + x \log_{10} q$ ← Ambil log bagi kedua-dua belah persamaan

$\log_{10} y = \log_{10} q\,(x) + \log_{10} p$ ← Bandingkan dengan $Y = mX + c$

Melalui perbandingan, $Y = \log_{10} y$, $X = x$, $m = \log_{10} q$ dan $c = \log_{10} p$

Y	m	X	c
$\log_{10} y$	$\log_{10} q$	x	$\log_{10} p$

Contoh 7

Jadual di bawah menunjukkan nilai-nilai x dan y yang didapati daripada satu uji kaji. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $3y - px^2 = qx$, dengan keadaan p dan q ialah pemalar.

x	1	2	3	5	7	9
y	20	34	48	60	63	36

(a) Tukarkan persamaan $3y - px^2 = qx$ kepada bentuk linear.

(b) Plot graf $\frac{y}{x}$ melawan x, dengan menggunakan skala 1 cm kepada 2 unit pada paksi-x dan 1 cm kepada 5 unit pada paksi-$\frac{y}{x}$. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.

(c) Daripada graf, cari nilai p dan nilai q.

Penyelesaian

(a) $3y - px^2 = qx$

$\frac{3y}{3x} - \frac{px^2}{3x} = \frac{qx}{3x}$ ← Bahagi kedua-dua belah persamaan dengan $3x$

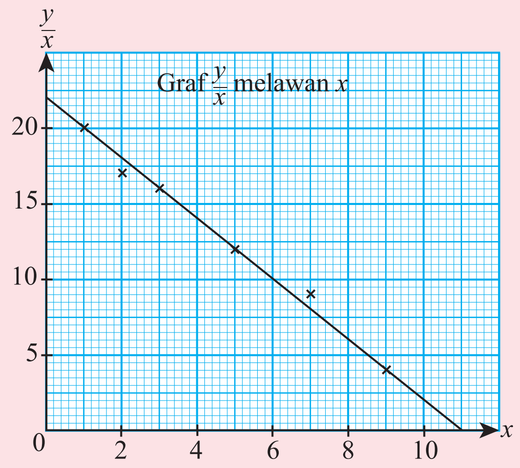
$\frac{y}{x} - \frac{px}{3} = \frac{q}{3}$

$\frac{y}{x} = \frac{p}{3}(x) + \frac{q}{3}$ ← Bandingkan dengan $Y = mX + c$

Melalui perbandingan, $Y = \frac{y}{x}$, $X = x$, $m = \frac{p}{3}$ dan $c = \frac{q}{3}$.

(b)

x	1	2	3	5	7	9
$\frac{y}{x}$	20	17	16	12	9	4



(c) Daripada graf,
pintasan-y = 22

$\frac{q}{3} = 22$

$q = 66$

kecerunan $= \frac{4 - 22}{9 - 0}$

$= -2$

$\frac{p}{3} = -2$

$p = -6$

Muzium Matematik

Renè Descartes telah mencipta grid koordinat yang dipanggil Rajah Cartesan. Bagaimanakah tercetusnya idea beliau untuk mencipta Rajah Cartesan? Beliau sering berbaring di atas katil sehingga lewat malam dan memerhatikan seekor lalat di siling biliknya. Beliau terfikir cara terbaik untuk menggambarkan kedudukan lalat pada siling tersebut. Beliau memutuskan untuk menjadikan salah satu sudut siling sebagai titik rujukan.

Untuk maklumat lanjut:

bit.ly/2Y496hw

BAB 6

Contoh 8

Jadual di bawah menunjukkan nilai-nilai x dan y yang diperoleh daripada satu pemerhatian eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = \frac{p^x}{q}$, dengan keadaan p dan q ialah pemalar.

x	2	4	5	6	7	8	10
y	0.3162	5.0119	100	1 584.89	6 309.57	63 095.73	100 000

(a) Plot graf $\log_{10} y$ melawan x, dengan menggunakan skala 1 cm kepada 2 unit pada kedua-dua paksi-$\log_{10} y$ dan paksi-x. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.

(b) Daripada graf, cari
  (i) nilai p dan nilai q,
  (ii) nilai y apabila $x = 3$.

Penyelesaian

(a)

$$y = \frac{p^x}{q}$$

$$\log_{10} y = \log_{10} p^x - \log_{10} q$$

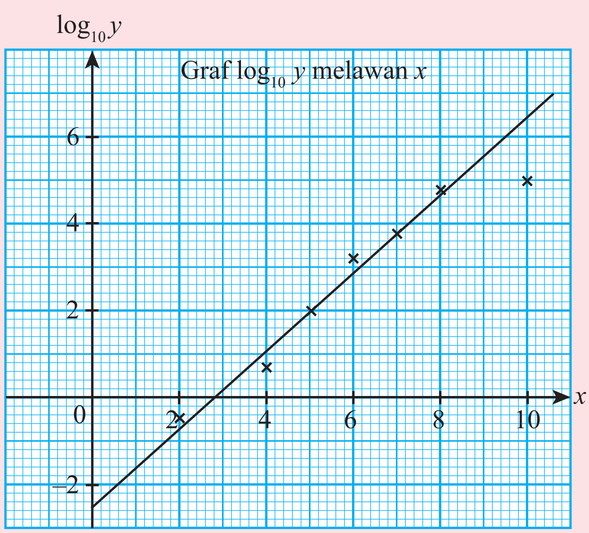
$$\log_{10} y = x \log_{10} p - \log_{10} q$$

$$\log_{10} y = (\log_{10} p)x - \log_{10} q$$

Bandingkan dengan $Y = mX + c$

Melalui perbandingan, $Y = \log_{10} y$, $X = x$, $m = \log_{10} p$ dan $c = -\log_{10} q$

x	2	4	5	6	7	8	10
$\log_{10} y$	-0.50	0.70	2.00	3.20	3.80	4.80	5.00



(b) (i)

$$-\log_{10} q = -2.5$$
$$\log_{10} q = 2.5$$
$$q = 316.228$$
$$\log_{10} p = \frac{2.00 - 3.80}{5 - 7}$$
$$\log_{10} p = 0.9$$
$$p = 7.943$$

(ii) Apabila $x = 3$, $\log_{10} y = 0.2$
$$y = 1.585$$

Latih Diri 6.5

1. Tukarkan setiap persamaan tak linear berikut kepada bentuk $Y = mX + c$. Seterusnya, kenal pasti Y, X, m dan c.

(a) $y = px^2 - q$ (b) $y = hx^2 + x$ (c) $y = \dfrac{p}{x^2} + q$

2. Jadual di bawah menunjukkan nilai-nilai x dan y yang didapati daripada satu pemerhatian eksperimen. Pemboleh ubah $\sqrt{x}$ dan $\dfrac{1}{y}$ dihubungkan oleh persamaan $\dfrac{1}{y} = p\sqrt{x} + q$, dengan keadaan p dan q ialah pemalar.

$\sqrt{x}$	0.70	1.00	1.22	1.45	1.58	1.80
$\dfrac{1}{y}$	0.62	1.20	1.65	2.00	2.38	2.75

(a) Plot graf $\dfrac{1}{y}$ melawan $\sqrt{x}$, dengan menggunakan skala 1 cm kepada 0.5 unit pada kedua-dua paksi-$\sqrt{x}$ dan paksi-$\dfrac{1}{y}$. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.

(b) Daripada graf, cari nilai

(i) q, (ii) p, (iii) y apabila $x = 1.21$.

Latihan Intensif 6.2

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2LTsM5Y untuk kuiz

1. Tukarkan setiap persamaan tak linear berikut kepada bentuk linear. Seterusnya, kenal pasti Y, X, kecerunan dan pintasan-Y.

(a) $y = 5x^2 + 3x$ (b) $y = p\sqrt{x} + \dfrac{q}{\sqrt{x}}$ (c) $y = ax^b$

(d) $x = mxy + ny$ (e) $yp^x = q$ (f) $y(b - x) = ax$

2. Jadual di bawah menunjukkan data yang menghubungkan pemboleh ubah x dan y oleh persamaan $y = ax^3 + bx^2$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar.

x	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y	0.31	2.05	6.19	14.00	26.30	45.00

(a) Tukarkan persamaan tak linear $y = ax^3 + bx^2$ kepada bentuk linear.

(b) Plot graf $\dfrac{y}{x^2}$ melawan x, dengan menggunakan skala yang sesuai pada paksi-x dan paksi-$\dfrac{y}{x^2}$. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.

(c) Daripada graf, cari nilai a dan nilai b.

3. Jadual di bawah menunjukkan data yang menghubungkan pemboleh ubah x dan y oleh persamaan $y = a^{b+x}$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar.

x	1	2	3	4	5
y	2.83	5.66	11.31	22.63	45.25

(a) Tukarkan persamaan tak linear $y = a^{b+x}$ kepada persamaan linear.

(b) Plot graf $\log_{10} y$ melawan x, dengan menggunakan skala yang sesuai pada paksi-x dan paksi-$\log_{10} y$. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.

(c) Daripada graf, cari nilai a dan nilai b.

6.3 Aplikasi Hukum Linear

Menyelesaikan masalah melibatkan hukum linear

Contoh 9 APLIKASI MATEMATIK

Satu eksperimen telah dijalankan untuk mengetahui kesan tumbesaran bagi sejenis tumbuhan terhadap kepekatan suatu hormon. Bacaan nilai daripada eksperimen tersebut telah dicatatkan dalam jadual di bawah. Tumbesaran tumbuhan itu dan kepekatan hormon dihubungkan oleh persamaan $P = 180 + rK - sK^2$, dengan r dan s ialah pemalar.

Kepekatan hormon per juta (K)	1	3	4	6	8	10
% tumbesaran tumbuhan (P)	181	179.7	178	168	157	140

(a) Plot graf $\dfrac{P - 180}{K}$ melawan K, dengan menggunakan skala 2 cm kepada 2 unit pada paksi-X dan 2 cm kepada 1 unit pada paksi-Y. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.
(b) Daripada graf, hitung nilai r dan nilai s.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Kenal pasti pemboleh ubah untuk menentukan paksi-X dan paksi-Y.
- Plot graf dengan menggunakan skala yang diberikan.
- Berdasarkan graf, cari nilai r dan nilai s.

2. Merancang strategi

(a) Tukarkan persamaan tak linear kepada bentuk linear dan bandingkan dengan bentuk $Y = mX + c$, dengan keadaan m ialah kecerunan dan c ialah pintasan paksi-Y.
(b) Bina satu jadual baharu menggunakan pemboleh ubah itu.
(c) Plot graf dengan menggunakan nilai-nilai pada jadual baharu.
(d) Cari pintasan-Y dan kecerunan dengan merujuk kepada graf. Seterusnya, bandingkan dengan persamaan $Y = mX + c$.

3. Melaksanakan strategi

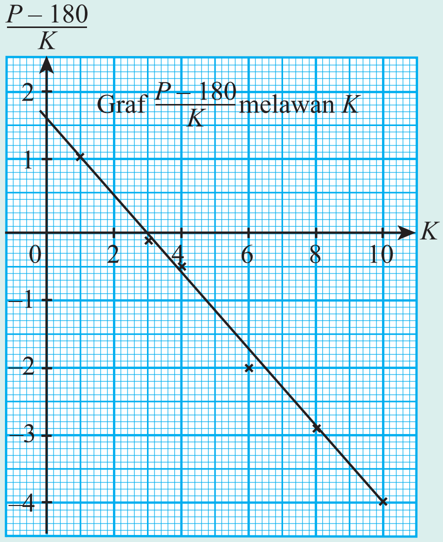
(a)
$$P = 180 + rK - sK^2$$
$$P - 180 = rK - sK^2$$
$$\frac{P - 180}{K} = \frac{rK}{K} - \frac{sK^2}{K}$$
$$\frac{P - 180}{K} = r - sK$$
$$\frac{P - 180}{K} = -sK + r$$

BAB 6

6.3.1

Melalui perbandingan, $Y = \dfrac{P - 180}{K}$, $X = K$, $m = -s$ dan $c = r$.

K	1	3	4	6	8	10
$\dfrac{P - 180}{K}$	1.00	−0.10	−0.50	−2.00	−2.88	−4.00



(b) Pintasan-Y = 1.6
$r = 1.6$

Kecerunan, $-s = \dfrac{-4 - 1.6}{10 - 0}$
$-s = -0.56$
$s = 0.56$

4. Membuat refleksi

Apabila $K = 1$,
$P = 180 + rK - sK^2$
$= 180 + (1.6)(1) - (0.56)(1)^2$
$= 181.04$
≈ 181

Apabila $K = 3$,
$P = 180 + rK - sK^2$
$= 180 + (1.6)(3) - (0.56)(3)^2$
$= 179.76$
≈ 179.7

Latih Diri 6.6

1. Jadual di bawah menunjukkan nilai-nilai bagi populasi sejenis bakteria yang disimpan di dalam satu tabung uji. Pemboleh ubah x mewakili bilangan jam dan y mewakili jumlah populasi. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = pq^x$, dengan keadaan p dan q ialah pemalar.

x (Bilangan jam)	2	4	6	8	10	16
y (Jumlah populasi)	3.98	6.31	10.00	15.85	25.12	100.00

(a) Plot $\log_{10} y$ melawan x, dengan menggunakan skala yang sesuai pada kedua-dua paksi. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.
(b) Daripada graf, cari nilai
(i) p (ii) q
(c) Anggarkan jumlah populasi bakteria itu selepas 5 jam.

6.3.1

2. Jadual di bawah menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y yang diperoleh daripada satu eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $xy - yb = a$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar.

x	0.485	1.556	4.528	10.227	18.333	100.000
y	20.60	18.00	13.25	8.80	6.00	1.40

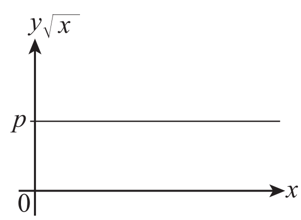
(a) Plot y melawan xy, dengan menggunakan skala yang sesuai pada kedua-dua paksi. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.
(b) Daripada graf, cari nilai a dan nilai b.
(c) Kaedah lain untuk mendapatkan graf garis lurus bagi persamaan tak linear di atas adalah dengan memplot $\frac{1}{y}$ melawan x. Tanpa melukis graf yang kedua, hitung nilai kecerunan dan pintasan-Y pada paksi mencancang graf.

Latihan Intensif 6.3

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2GFOZ2X untuk kuiz

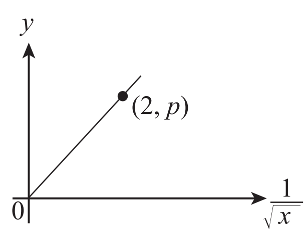
1. Rajah (a) dan Rajah (b) menunjukkan dua graf garis lurus yang dihubungkan oleh persamaan $y\sqrt{x} = 10$. Nyatakan nilai p dalam setiap kes yang berikut.

(a)



Rajah (a)

(b)



Rajah (b)

2. Jadual di bawah menunjukkan data yang diperoleh daripada suatu eksperimen pergerakan bandul, dengan keadaan p ialah panjang tali bandul, dalam cm, dan t ialah tempoh ayunan bandul, dalam saat. Salah satu data t disyaki telah salah dicatat.

Panjang, p (cm)	10	20	30	40	50	60
Tempoh ayunan, t (s)	6.3	9.0	11.0	12.6	14.1	15.0

(a) Plot graf t^2 melawan p, dengan menggunakan skala yang sesuai. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.
(b) Tandakan ⊗ bagi titik yang salah dicatatkan pada graf. Kemudian, cari nilai t yang betul.
(c) Gunakan graf untuk mencari nilai k jika t dan p dihubungkan oleh persamaan $\sqrt{p} = \frac{t}{k}$, dengan keadaan t dan p ialah pemalar.

3. Jumlah pengeluaran sejenis komoditi, N, dihubungkan dengan jumlah jam, H oleh persamaan $2N^2 - a = \frac{b}{H}$. Jadual di bawah menunjukkan nilai N dan nilai H yang sepadan.

***H* (jam)**	20	40	60	80	100
***N* (tan metrik)**	1.225	1.162	1.140	1.135	1.127

(a) Plot graf garis lurus penyuaian terbaik N^2H melawan H, dengan menggunakan skala yang sesuai.
(b) Gunakan graf di (a) untuk mencari nilai a dan nilai b.
(c) Daripada graf, anggarkan jumlah pengeluaran jika jumlah jam ialah 10.
(d) Pengurus syarikat itu merancang untuk mengeluarkan sebanyak 1.1183 tan metrik komoditi. Jika seorang pekerja bekerja selama 8 jam, berapakah bilangan pekerja yang diperlukan oleh syarikat itu?

4. Jadual di bawah menunjukkan nilai-nilai dalam suatu uji kaji yang melibatkan kepekatan cecair, L unit^3, dihubungkan dengan suhu, T, oleh persamaan $L = A(3)^{\frac{b}{T}}$.

***T* (°*C*)**	0.100	0.033	0.020	0.014	0.011	0.010
***L* (unit³)**	6.31×10^8	1.00×10^{10}	1.58×10^{11}	3.98×10^{12}	2.51×10^{13}	1.58×10^{14}

(a) Plot graf garis lurus penyuaian terbaik $\log_{10} L$ melawan $\frac{1}{T}$, dengan menggunakan skala yang sesuai.
(b) Gunakan graf di (a) untuk mencari nilai
(i) A,
(ii) b.
(c) Tentukan suhu apabila cecair itu dipanaskan sehingga kepekatannya menjadi 21.5 unit^3.

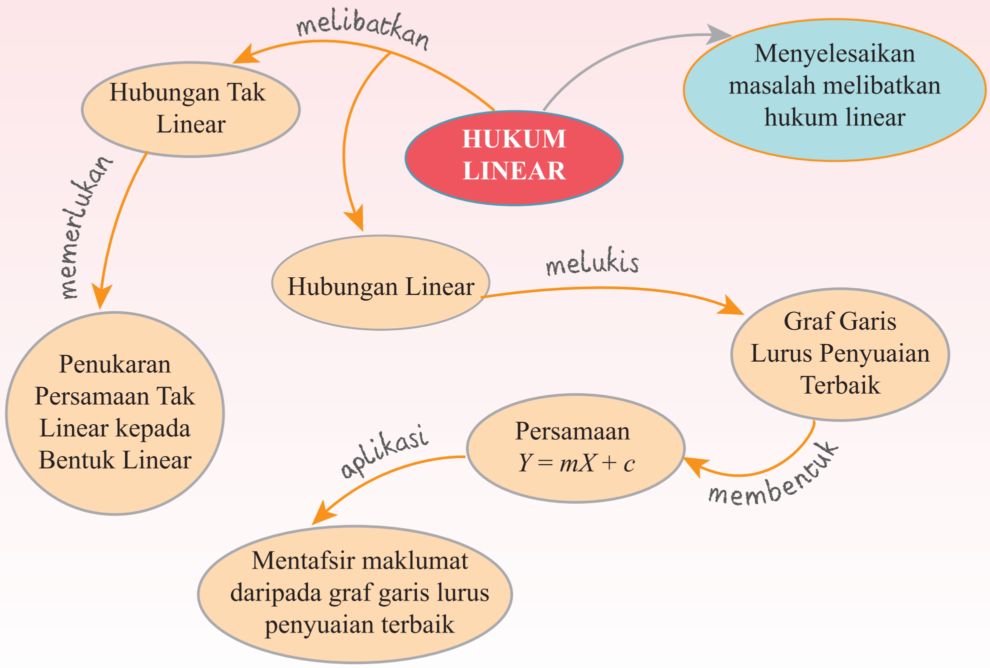
5. Jadual di bawah menunjukkan nilaian mata percubaan bagi satu permainan yang melibatkan dua pemboleh ubah, u dan v yang mempunyai hubungan $\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$.

u	15	20	25	50	100
v	30.0	20.2	16.6	12.5	11.1

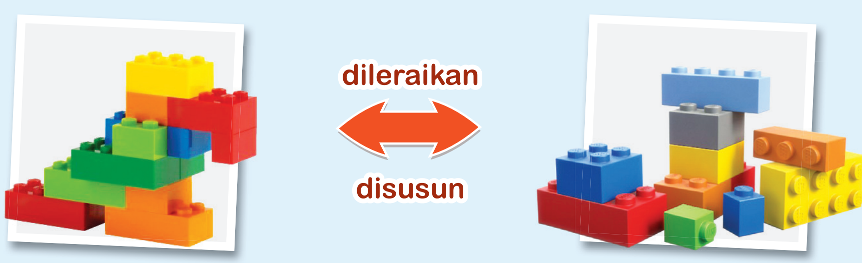
(a) Plot $\frac{1}{v}$ melawan $\frac{1}{u}$. Lukiskan garis lurus penyuaian terbaik.
(b) Daripada graf,
(i) ungkapkan v dalam sebutan u.
(ii) tentukan nilai $\frac{1}{f}$ apabila $\frac{1}{u} = 0$, seterusnya cari nilai f.

BAB 6

RUMUSAN BAB 6



TULIS JURNAL ANDA



Rajah di atas menunjukkan lego yang disusun dan juga boleh dileraikan. Dalam matematik, terdapat pelbagai contoh yang mempunyai songsangan. Anda boleh menukarkan persamaan tak linear kepada bentuk linear dan boleh menukarkan bentuk linear kepada persamaan tak linear semula. Bolehkah anda menentukan langkah-langkah yang diperlukan untuk menukarkan persamaan linear kepada bentuk persamaan tak linear?

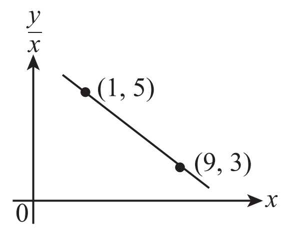
LATIHAN PENGUKUHAN

1. Ungkapkan setiap persamaan tak linear berikut ke dalam bentuk linear, $Y = mX + c$, dengan X dan Y ialah pemboleh ubah manakala m dan c ialah pemalar. TP2

(a) $y = 3x + \dfrac{4}{x^2}$ (b) $y = px^3 + qx^2$ (c) $y = \dfrac{p}{x} + \dfrac{q}{p}x$

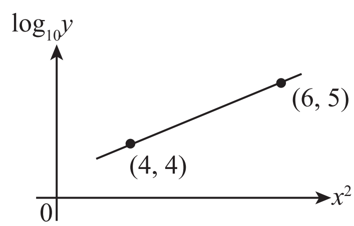
(d) $y = pk^{\sqrt{x}}$ (e) $y = pk^{x-1}$ (f) $y = \dfrac{k^{x^2}}{p}$

2. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = px^2 + qx$, dengan keadaan p dan q ialah pemalar. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf garis lurus penyuaian terbaik yang diperoleh dengan memplot graf $\dfrac{y}{x}$ melawan x. TP3

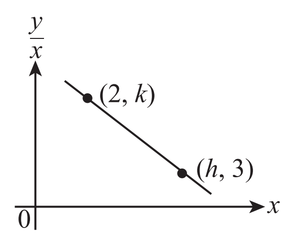


(a) Tukarkan persamaan $y = px^2 + qx$ kepada bentuk linear.
(b) Cari nilai p dan nilai q.

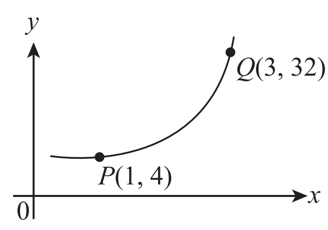
3. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = pq^{\frac{x^2}{4}}$. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf garis lurus penyuaian terbaik yang diperoleh dengan memplot $\log_{10} y$ melawan x^2. Cari nilai p dan nilai q. TP3



4. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf garis lurus penyuaian terbaik $\dfrac{y}{x}$ melawan x. Diberi bahawa $y = 5x - 3x^2$, cari nilai k dan nilai h. TP3



5. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf y melawan x untuk persamaan $y = ab^x$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar. TP3



(a) Lakarkan graf garis lurus $\log_2 y$ melawan x. Tandakan dan nyatakan koordinat bagi titik-titik sepadan P dan Q.
(b) Berdasarkan graf di (a), cari nilai a dan nilai b.

6. Apabila x^2y melawan x diplot, satu garis lurus diperoleh. Garis itu mempunyai kecerunan 8 dan melalui titik (2, 19).
(a) Tentukan persamaan yang menghubungkan x dan y.
(b) Seterusnya, cari nilai y apabila $x = 9.4$.

BAB 6

7. Satu kajian dijalankan untuk menentukan hubungan jisim, m dengan isi padu, V bagi sejenis minyak masak. Jadual berikut menunjukkan hasil dapatan kajian yang telah dilakukan. TP2

V	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
m	0.35	0.84	1.23	1.60	2.00	2.37

Plot graf m melawan V dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada kedua-dua paksi. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.

8. Berdasarkan satu eksperimen, hubungan antara nilai x dan nilai y diperoleh seperti dalam jadual di bawah. TP3

x	10	20	30	40	50	60
y	16.5	20.0	23.5	27.5	31.5	35.0

(a) Plot graf y melawan x dan lukis garis lurus penyuaian terbaik dengan menggunakan skala 2 cm kepada 10 unit bagi paksi-x dan 2 cm kepada 5 unit bagi paksi-y.
(b) Seterusnya, bentukkan persamaan garis lurus.

9. Jadual di bawah menunjukkan nilai-nilai yang menghubungkan suhu, T suatu larutan selepas masa, t dalam suatu eksperimen. TP4

$t(s)$	2	4	6	8	10
T(°C)	29.0	40.0	31.0	32.1	33.0

(a) Plot graf T melawan t, seterusnya lukis garis lurus penyuaian terbaik dengan skala yang sesuai.
(b) Tandakan ⊗ bagi titik yang salah dicatatkan pada graf. Kemudian, cari nilai yang betul bagi T°C.
(c) Daripada graf, cari
  (i) suhu permulaan larutan tersebut,
  (ii) suhu larutan selepas 9 saat,
  (iii) masa yang diambil untuk larutan mencapai suhu 30.5°C.

10. Jadual di bawah menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y, yang diperoleh daripada suatu eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = st^x$, dengan a dan b ialah pemalar. TP3

x	1.5	3.0	4.5	6.0	7.5	9.0
y	2.51	3.24	4.37	5.75	7.76	10.00

(a) Plot graf $\log_{10} y$ melawan x, dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi-x dan 2 cm kepada 0.1 unit pada paksi-$\log_{10} y$. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.
(b) Daripada graf, cari nilai
  (i) s,
  (ii) t,
  (iii) x apabila $y = 4$.

11. Jadual di bawah menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y yang diperoleh daripada suatu eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $2y - p = \frac{q}{x}$, dengan keadaan p dan q ialah pemalar. TP3

x	1	2	3	4	5	6
y	5	3.5	3.1	2.7	2.6	2.5

(a) Plot graf xy melawan x, dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi-x dan 2 cm kepada 2 unit pada paksi-xy. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik.

(b) Gunakan graf di (a) untuk mencari nilai
- (i) p,
- (ii) q,
- (iii) y apabila $x = 3.5$.

(c) Hitung nilai x apabila $y = 50$.

Penerokaan MATEMATIK

Durian merupakan buah yang terkenal di Asia Tenggara. Percubaan untuk mengeksport durian dalam bentuk sejuk beku telah dilakukan supaya dapat diperkenalkan ke negara yang berada di luar Asia Tenggara. Pembajaan tanaman merupakan amalan yang perlu dilakukan dalam usaha untuk meningkatkan pengeluaran hasil durian. Jadual berikut menunjukkan hubungan antara umur dan jisim pokok durian dengan menggunakan kaedah pembajaan yang disyorkan pada peringkat vegetatif.

Umur (tahun)	1	2	3	4	5
Jisim (kg)	0.5	1.0	2.0	2.8	4.0

(a) Lukis gambar rajah serakan bagi data dalam jadual di atas. Adakah gambar rajah serakan menunjukkan hubungan linear antara umur dan jisim pokok durian yang menggunakan kaedah pembajaan?

(b) Dengan menggunakan skala yang sesuai, lukis garis lurus penyuaian terbaik dengan jisim sebagai pemboleh ubah bersandar dan umur sebagai pemboleh ubah tak bersandar. Kemudian, cari persamaan yang menghubungkan kedua-dua pemboleh ubah.

(c) Tukarkan hubungan tak linear kepada bentuk linear dan bina jadual yang baharu bagi pemboleh ubah yang terlibat.

(d) Daripada graf anda, ramalkan jisim buah durian yang berusia 7 tahun.

BAB 7

Geometri Koordinat

Apakah yang akan dipelajari?

- Pembahagi Tembereng Garis
- Garis Lurus Selari dan Garis Lurus Serenjang
- Luas Poligon
- Persamaan Lokus

Senarai Standard Pembelajaran

bit.ly/2Te4KSK

KATA KUNCI

- Pembahagi tembereng garis — *Divisor of line segment*
- Garis lurus selari — *Parallel straight lines*
- Garis lurus serenjang — *Perpendicular straight lines*
- Kecerunan — *Gradient*
- Luas poligon — *Area of polygon*
- Persamaan lokus — *Equation of a locus*

Penggunaan aplikasi navigasi GPS (*Global Positioning System*) membolehkan kita mencari kedudukan tempat yang ingin dituju dengan mudah dan pantas. Tahukah anda bahawa navigasi GPS menggunakan idea geometri koordinat yang dikenali sebagai *World Geodetic System* (WGS 84) untuk menentukan kedudukan sesuatu tempat di permukaan bumi?

Tahukah Anda?

Ibrahim Ibn Sinan (908-946 SM) merupakan seorang ahli matematik dan astronomi dari Harran yang terletak di utara Mesopotamia. Beliau mula membuat kajian tentang bidang geometri dan astronomi pada usia 15 tahun dan menulis hasil kajiannya yang pertama pada usia 16 tahun. Beliau meneruskan penyelidikan Archimedes berkaitan luas, isi padu dan khususnya tangen kepada suatu bulatan.

Untuk maklumat lanjut:

bit.ly/2PE09Zf

SIGNIFIKAN BAB INI

- Dalam bidang pembinaan, geometri koordinat digunakan untuk membuat lakaran sesebuah bangunan.
- Ahli astrofizik menggunakan geometri koordinat untuk menentukan jarak di antara planet.
- Bidang penerbangan menggunakan geometri koordinat untuk menentukan sudut yang terlibat dalam setiap laluan pesawat.

Imbas kod *QR* ini untuk menonton video tentang aplikasi GPS.

bit.ly/2PG4GdZ

7.1 Pembahagi Tembereng Garis

Tembereng garis ialah sebahagian daripada garis lurus yang mempunyai dua titik hujung dengan panjang atau jarak tertentu. Mana-mana titik yang terletak pada tembereng itu dalam nisbah tertentu dikenali sebagai titik pembahagian.

Membuat perkaitan antara kedudukan titik yang membahagikan sesuatu tembereng garis dengan nisbah yang berkaitan

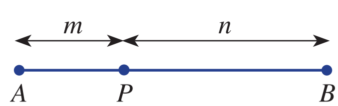
INKUIRI 1 Berkumpulan

Tujuan: Meneroka perkaitan antara kedudukan titik dalam suatu tembereng garis dengan nisbahnya

ggbm.at/ksz5pcew

Arahan:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Pada tembereng garis AB, gerakkan titik P ke kanan dan ke kiri. Perhatikan nilai m dan nilai n yang terpapar.
3. Apakah perkaitan antara kedudukan titik P pada tembereng garis itu dengan nilai m dan nilai n?
4. Pertimbangkan satu kedudukan P pada tembereng garis AB dan jawab soalan berikut.
   (a) Berapakah bilangan bahagian antara titik P dan titik A?
   (b) Berapakah bilangan bahagian antara titik P dan titik B?
   (c) Berapakah bilangan bahagian antara titik A dan titik B?
   (d) Dalam sebutan AB, berapakah panjang AP dan PB?
   (e) Tentukan nisbah $AP : PB$.
   (f) Apakah perkaitan antara kedudukan P dalam tembereng garis AB itu dengan nisbah yang diperoleh dalam soalan (e)?
5. Seterusnya, gerakkan titik P supaya nisbah $m : n$ menjadi $5 : 5 = 1 : 1$. Adakah panjang AP sama dengan panjang PB? Nyatakan kedudukan titik P pada tembereng garis itu apabila nisbah $m : n$ adalah sama untuk setiap bahagian.
6. Tukarkan nisbah $m : n$ dan perhatikan kedudukan titik P. Adakah kedudukannya juga berubah mengikut perubahan nilai nisbah?



Hasil daripada Inkuiri 1, titik P yang berada pada tembereng garis AB membahagi tembereng garis itu kepada dua bahagian dengan nisbah $m : n$. Nisbah $m : n$ menunjukkan tembereng garis AB dibahagikan kepada $(m + n)$ bahagian yang sama.

Kedudukan titik P pada tembereng garis AB menentukan m bilangan bahagian yang sama dari titik A ke titik P dan n bilangan bahagian yang sama dari titik B ke titik P. Jadi, titik P membahagikan tembereng garis itu dalam nisbah $m : n$. Sebaliknya, nisbah $m : n$ akan menentukan kedudukan titik P pada tembereng garis AB. Apabila nisbah $m : n$ berubah, kedudukan titik P juga berubah. Jika $m = n$, maka titik P ialah titik tengah bagi tembereng garis AB. Secara amnya,

> Kedudukan titik P pada suatu tembereng garis AB membahagikan tembereng garis itu dengan nisbah $m : n$ dan sebaliknya.

Contoh 1

Diberi tembereng garis PQ dan suatu titik R terletak pada PQ. Titik R berada $\frac{7}{9}$ daripada jarak PQ dari titik P di sepanjang tembereng garis PQ.

(a) Lakarkan situasi ini menggunakan tembereng garis.
(b) Adakah titik R paling hampir dengan P atau Q? Terangkan.
(c) Dengan menggunakan maklumat yang diberi, tentukan nisbah berikut.
(i) $PR : PQ$, (ii) $RQ : PR$, (iii) $PR : RQ$.
(d) Seterusnya, huraikan perkaitan antara kedudukan titik R pada tembereng garis PQ dengan nisbahnya.

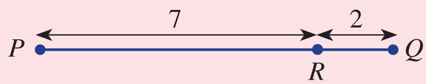
Penyelesaian

(a)

(b) Titik R terletak paling hampir dengan Q kerana kedudukan titik R ini adalah lebih separuh daripada tembereng garis itu dari titik P.

(c) (i) $PR : PQ = 7 : 9$
(ii) $RQ : PR = 2 : 7$
(iii) $PR : RQ = 7 : 2$

(d) Titik R membahagikan tembereng garis PQ dengan nisbah 7 : 2



Latih Diri 7.1

1. Rajah di bawah menunjukkan satu tembereng garis AB yang dibahagikan kepada 12 bahagian yang sama.

P, Q dan R ialah titik pembahagian dalam tembereng garis itu.
(a) Tentukan kedudukan setiap titik itu berhubung dengan nisbahnya.
(b) Jika titik S berada pada tembereng garis AB dalam nisbah 5 : 7, tanda dan labelkan kedudukan titik S pada tembereng itu.

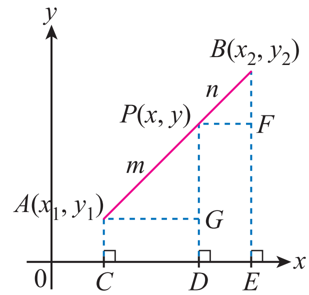
2. Rajah di bawah menunjukkan titik P yang membahagi seutas tali AB dengan nisbah $m : n$.

Diberi $AP = 10$ cm dan $AB = 35$ cm.
(a) Cari nilai m dan nilai n.
(b) Huraikan kedudukan P di atas tali itu berhubung dengan nisbahnya.
(c) Jika tali itu diletakkan di atas paksi-x pada satah Cartes dengan keadaan A ialah asalan dan koordinat B ialah (21, 0), tentukan koordinat bagi P.

7.1.1

Menerbitkan rumus pembahagi tembereng garis pada satah Cartes

Dalam Rajah 7.1, koordinat bagi titik A dan titik B masing-masing ialah (x_1, y_1) dan (x_2, y_2). $P(x, y)$ ialah titik yang membahagi tembereng garis AB dalam nisbah $m : n$. Jadi, $CD = x - x_1$, $DE = x_2 - x$, $PG = y - y_1$ dan $BF = y_2 - y$. Oleh sebab AC, PD dan BE adalah selari, kita peroleh:



Rajah 7.1

$$\begin{aligned}
\frac{CD}{DE} &= \frac{AP}{PB} \\
\frac{x - x_1}{x_2 - x} &= \frac{m}{n} \\
n(x - x_1) &= m(x_2 - x) \\
nx - nx_1 &= mx_2 - mx \\
mx + nx &= nx_1 + mx_2 \\
x(m + n) &= nx_1 + mx_2 \\
x &= \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}
\end{aligned}$$

Bagi BF, PG dan AC yang juga selari, kita peroleh:

$$\begin{aligned}
\frac{PG}{BF} &= \frac{AP}{PB} \\
\frac{y - y_1}{y_2 - y} &= \frac{m}{n} \\
n(y - y_1) &= m(y_2 - y) \\
ny - ny_1 &= my_2 - my \\
my + ny &= ny_1 + my_2 \\
y(m + n) &= ny_1 + my_2 \\
y &= \frac{ny_1 + my_2}{m + n}
\end{aligned}$$

Maka, koordinat titik $P(x, y)$ yang membahagi tembereng garis yang menyambungkan titik $A(x_1, y_1)$ dan titik $B(x_2, y_2)$ dengan nisbah $m : n$ ialah:

$$P(x, y) = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n}\right)$$

Apakah yang akan berlaku apabila $m = n$? Apabila $m = n$, P akan menjadi titik tengah bagi tembereng garis AB dan diwakili oleh M.

$$\begin{aligned}
M &= \left(\frac{mx_1 + mx_2}{m + m}, \frac{my_1 + my_2}{m + m}\right) \\
&= \left(\frac{m(x_1 + x_2)}{2m}, \frac{m(y_1 + y_2)}{2m}\right) \\
&= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)
\end{aligned}$$

QR

Kaedah lain untuk menerbitkan rumus pembahagi tembereng garis pada satah Cartes.

bit.ly/2VMMlBf

SUMBANG SARAN

Dengan menggunakan Teorem Pythagoras, tunjukkan bahawa panjang tembereng garis AB yang diwakili oleh d dalam Rajah 7.1 ialah

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

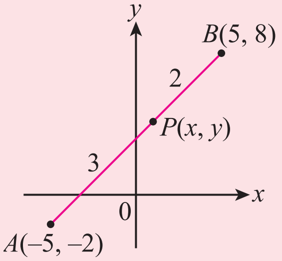
Contoh 2

(a) Koordinat titik *A* dan *B* masing-masing ialah (–5, –2) dan (5, 8). Jika titik *P* membahagi tembereng garis *AB* dengan nisbah 3 : 2, cari koordinat titik *P*.

(b) Titik *A*(–7, 3), *P*(5, –3), *B* dan *M* terletak pada satu garis lurus. Diberi *P* membahagi tembereng garis *AB* dengan nisbah 3 : 1 dan *M* ialah titik tengah bagi *AB*. Cari
  (i) koordinat *B*,
  (ii) koordinat *M*.

Penyelesaian

(a) *P*(*x, y*) ialah titik yang membahagikan *AB* dengan nisbah 3 : 2. Jadi,

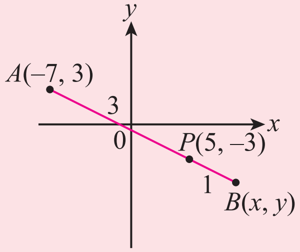


$$\text{koordinat-}x\text{ bagi } P,\ x = \frac{2(-5)+3(5)}{3+2} = \frac{-10+15}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\text{koordinat-}y\text{ bagi } P,\ y = \frac{2(-2)+3(8)}{3+2} = \frac{-4+24}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

Maka, koordinat titik *P* ialah (1, 4).

(b) (i) *B* ialah (*x*, *y*) dan *P*(5, –3) membahagi *AB* dalam nisbah 3 : 1. Jadi,



koordinat-*x* bagi *P* = 5

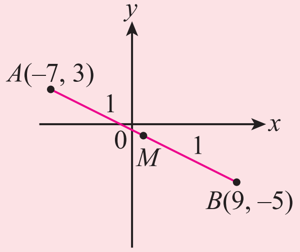
$$\frac{1(-7)+3x}{3+1} = 5$$
$$3x - 7 = 20$$
$$3x = 27$$
$$x = 9$$

koordinat-*y* bagi *P* = –3

$$\frac{1(3)+3y}{3+1} = -3$$
$$3 + 3y = -12$$
$$3y = -15$$
$$y = -5$$

Maka, koordinat *B* ialah (9, –5).

(ii) $$\text{Titik tengah } AB = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-7+9}{2}, \frac{3+(-5)}{2}\right) = (1, -1)$$



Maka, koordinat *M* ialah (1, –1).

BAB 7

7.1.2

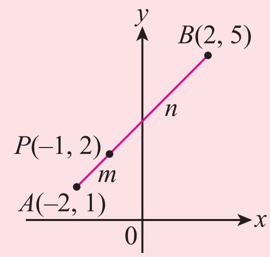
Contoh 3

Cari nisbah $AP : PB$ dengan keadaan titik $P(-1, 2)$ membahagi tembereng garis yang menyambungkan titik $A(-2, 1)$ dan titik $B(2, 5)$.

Penyelesaian

Katakan $P(-1, 2)$ membahagi AB dengan nisbah $m : n$ dan koordinat-x bagi P ialah -1.

$$\frac{n(-2) + m(2)}{m + n} = -1$$
$$2m - 2n = -m - n$$
$$3m = n$$
$$\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$$



Maka, nisbah $AP : PB$ ialah $1 : 3$.

Latih Diri 7.2

1. Titik P membahagi tembereng garis yang menyambungkan titik A dan titik B berikut dengan nisbah yang diberi. Cari koordinat titik P.
(a) $A(3, 7)$, $B(-7, 2)$ dengan nisbah $3 : 2$.
(b) $A(-4, -1)$, $B(2, 5)$ dengan nisbah $2AP : PB$.
(c) $A(7, -3)$, $B(-3, 2)$ dengan nisbah $3AP : 2PB$.

2. Titik $R(p, t)$ membahagi tembereng garis yang menyambungkan titik $A(2h, h)$ dan $B(2p, 3t)$ dengan nisbah $2 : 3$. Ungkapkan p dalam sebutan t.

3. Suatu garis lurus melalui titik $A(-2, -5)$ dan $B(6, 7)$. Titik C membahagi tembereng garis AB dalam nisbah $3 : 1$ dan D pula membahagi AB dalam nisbah $1 : 1$. Cari
(a) koordinat C,
(b) koordinat D.

4. Titik P membahagi tembereng garis yang menyambungkan titik A dan B dengan nisbah $AP : PB$. Cari nisbah $AP : PB$ dan nilai k bagi setiap yang berikut.
(a) $A(1, k)$, $B(-5, 10)$ dan $P(-1, 2)$
(b) $A(1, 2)$, $B(k, 6)$ dan $P(3, 4)$
(c) $A(k, 3)$, $B(2, 8)$ dan $P(6, 4)$
(d) $A(-3, -2)$, $B(2, 8)$ dan $P(-1, k)$

Menyelesaikan masalah yang melibatkan pembahagi tembereng garis

Contoh 4

APLIKASI MATEMATIK

Seekor labah-labah berada pada kedudukan $E(-7, -5)$ pada sehelai kertas graf dan menuju ke arah titik $G(13, 5)$ di sepanjang suatu garis lurus dengan halaju sekata. Labah-labah itu berada di titik P selepas 18 saat perjalanannya dan tiba di titik G dalam masa 1 minit. Tentukan
(a) koordinat titik P,
(b) nisbah $EQ : QG$ apabila labah-labah itu berada di titik $Q(11, 4)$ di atas garis lurus itu.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Kedudukan asal labah-labah ialah di $E(-7, -5)$. Labah-labah itu tiba di titik $G(13, 5)$ dalam masa 1 minit (60 saat).
- Cari koordinat P selepas 18 saat perjalanannya.
- Cari nisbah $EQ : QG$ apabila labah-labah itu berada di titik $Q(11, 4)$.

2. Merancang strategi

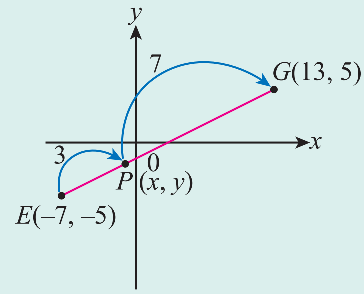
- Cari nisbah $EP : PG$ terlebih dahulu dan gunakan rumus pembahagi tembereng garis, $P(x, y) = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n}\right)$ untuk menentukan koordinat P.
- Gunakan rumus $\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n}\right)$ sekali lagi untuk menentukan nisbah $EQ : QG$.

3. Melaksanakan strategi

(a) $P(x, y)$ ialah titik labah-labah itu berada selepas 18 saat perjalanannya.
Nisbah $EP : EG$ ialah $18 : 60 = 3 : 10$, jadi nisbah $EP : PG = 3 : 7$.

$$P(x, y) = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n}\right)$$
$$= \left(\frac{7(-7) + 3(13)}{3 + 7}, \frac{7(-5) + 3(5)}{3 + 7}\right)$$
$$= \left(\frac{-10}{10}, \frac{-20}{10}\right)$$
$$= (-1, -2)$$

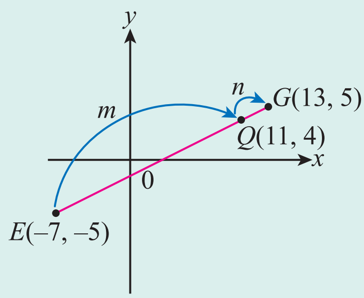
Maka, koordinat P ialah $(-1, -2)$.



(b) Katakan $Q(11, 4)$ membahagi EG dengan nisbah $m : n$.
Koordinat-y bagi Q ialah 4,

$$\frac{n(-5) + m(5)}{m + n} = 4$$
$$5m - 5n = 4m + 4n$$
$$m = 9n$$
$$\frac{m}{n} = \frac{9}{1}$$

Maka, nisbah $EQ : QG$ ialah $9 : 1$.



BAB 7

7.1.3

4. Membuat refleksi

(a) $EP = \sqrt{(-1-(-7))^2 + (-2-(-5))^2}$
$= \sqrt{6^2 + 3^2}$
$= \sqrt{45}$
$= 3\sqrt{5}$

$PG = \sqrt{(13-(-1))^2 + (5-(-2))^2}$
$= \sqrt{14^2 + 7^2}$
$= \sqrt{245}$
$= 7\sqrt{5}$

Maka, nisbah $EP : PG = 3\sqrt{5} : 7\sqrt{5} = 3 : 7$.

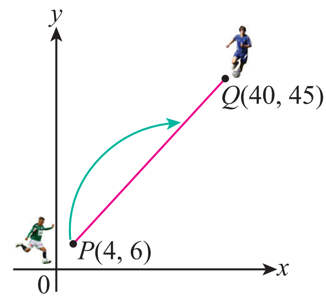
(b) $EQ = \sqrt{(11-(-7))^2 + (4-(-5))^2}$
$= \sqrt{18^2 + 9^2}$
$= \sqrt{405}$
$= 9\sqrt{5}$

$QG = \sqrt{(13-11)^2 + (5-4)^2}$
$= \sqrt{2^2 + 1^2}$
$= \sqrt{5}$

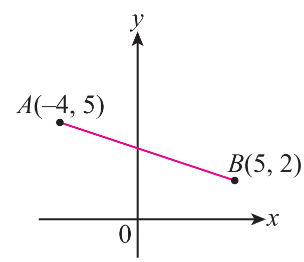
Maka, nisbah $EQ : QG = 9\sqrt{5} : \sqrt{5} = 9 : 1$.

Latih Diri 7.3

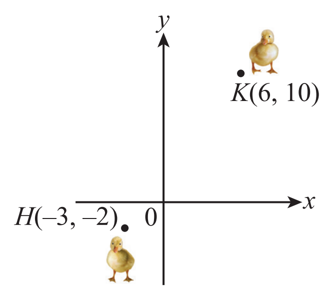
1. Rajah di sebelah menunjukkan kedudukan dua orang pemain bola sepak, P dan Q. Koordinat bagi pemain P dan Q masing-masing ialah (4, 6) dan (40, 45). Pemain P ingin menendang bola kepada pemain Q tetapi bola itu jatuh di kedudukan $\frac{2}{3}$ di sepanjang garis lurus menuju pemain Q dari pemain P. Tentukan koordinat bola semasa bola itu menyentuh permukaan padang.



2. Rajah di sebelah menunjukkan pelan sebatang lebuh raya lurus antara dua buah bandar, A dan B pada suatu satah Cartes. Seorang jurutera ingin membina dua buah rumah rehat antara dua buah bandar itu dengan keadaan kedua-dua buah rumah rehat membahagi lebuh raya kepada tiga bahagian yang sama jaraknya. Tentukan koordinat kedua-dua buah rumah rehat itu.



3. Rajah di sebelah menunjukkan kedudukan dua ekor anak itik, H dan K pada suatu satah Cartes. Diberi koordinat anak itik H ialah (–3, –2) dan koordinat anak itik K ialah (6, 10). Kedua-dua anak itik itu berjalan ke arah satu sama lain dengan halaju yang berbeza dan bertemu di titik L. Halaju anak itik H ialah dua kali ganda halaju anak itik K.
(a) Nyatakan nisbah $HL : LK$.
(b) Cari jarak anak itik K dari titik asalnya apabila anak itik K bertemu dengan anak itik H.



BAB 7

Latihan Intensif 7.1

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2YbJ3JV untuk kuiz

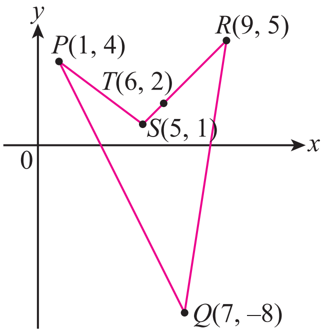
1. Suatu garis lurus melalui $P(2, 8)$ dan $Q(7, 3)$. Titik R membahagi tembereng garis PQ dengan keadaan $PR = 4QR$. Cari koordinat titik R.

2. Jika suatu titik $R(6, 3)$ membahagi tembereng garis dari $P(4, 5)$ ke $Q(x, y)$ dalam nisbah $2 : 5$, cari
   (a) koordinat Q,
   (b) koordinat titik tengah PQ.

3. Titik $C(1, 4)$ membahagi garis lurus yang menyambungkan titik $A(–3, 6)$ dan $B(h, k)$ dengan nisbah $2 : 3$. Cari nilai h dan nilai k.

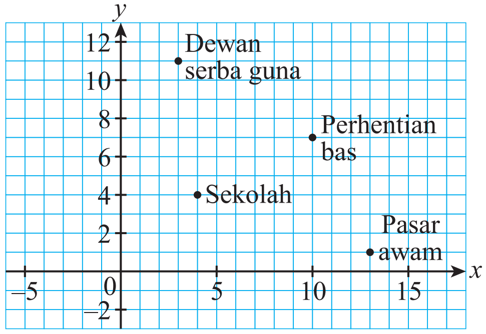
4. Titik-titik $A(4r, r)$, $B(e, f)$ dan $C(3e, 4f)$ terletak pada suatu garis lurus. B membahagi garis lurus AC dengan nisbah $3 : 4$. Ungkapkan e dalam sebutan f.

5. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah sisi empat $PQRS$ dengan bucu-bucunya ialah $P(1, 4)$, $Q(7, –8)$, $R(9, 5)$ dan $S(5, 1)$. Titik $T(6, 2)$ terletak di atas garis lurus RS. Cari
   (a) koordinat titik U yang membahagi sisi PQ dengan nisbah $2 : 1$,
   (b) koordinat titik tengah sisi QR,
   (c) nisbah $RT : TS$,
   (d) panjang sisi PS.



6. Titik $P(k, 2)$ membahagi suatu garis lurus yang menyambungkan titik $A(–2, 1)$ dan $B(2, 5)$ dengan nisbah $m : n$. Cari
   (a) nisbah $m : n$,
   (b) nilai k.

7. Rajah di bawah menunjukkan kedudukan dewan serba guna, sekolah, pasar awam dan perhentian bas pada satah Cartes. Rumah Haziq terletak di titik tengah P_1P_2 dengan keadaan P_1 membahagi tembereng garis dari dewan serba guna ke pasar awam dengan nisbah $4 : 1$ manakala P_2 pula membahagi tembereng garis dari sekolah ke perhentian bas dengan nisbah $1 : 2$.



Tentukan titik bagi kedudukan rumah Haziq.

7.2 Garis Lurus Selari dan Garis Lurus Serenjang

Garis selari dan garis serenjang biasa didapati di sekeliling kita. Pelampung yang memisahkan setiap lorong di kolam renang dan struktur sokongan dalam pembinaan adalah beberapa contoh garis selari dan garis serenjang. Apakah contoh lain di sekeliling kita yang berkaitan dengan garis selari dan garis serenjang?

Membuat dan mengesahkan konjektur kecerunan bagi garis lurus selari dan garis lurus serenjang

INKUIRI 2 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Membuat dan mengesahkan konjektur bagi hubungan antara kecerunan dua garis selari dan kecerunan dua garis serenjang

Arahan:

1. Bentukkan dua kumpulan dan setiap kumpulan memilih satu aktiviti.

AKTIVITI 1

1. Dengan menggunakan perisian *GeoGebra*, lukis garis lurus L_1 dan garis lurus L_2 yang selari antara sama lain pada satah Cartes.
2. Catatkan kecerunan bagi garis lurus L_1 dan L_2.
3. Gerakkan garis lurus L_1 atau L_2 dan perhatikan perubahan dalam kecerunan L_1 dan L_2.
4. Apakah yang dapat anda katakan tentang hubungan antara kecerunan bagi garis lurus L_1 dan L_2 itu?
5. Ukur sudut yang terbentuk antara garis lurus L_1 dan L_2 masing-masing dengan arah positif paksi-x. Apakah yang dapat anda perhatikan pada kedua-dua sudut itu? Jelaskan.
6. Bersama-sama ahli kumpulan, sahkan hubungan yang anda peroleh dalam Langkah 4 daripada keputusan yang anda peroleh dalam Langkah 5.

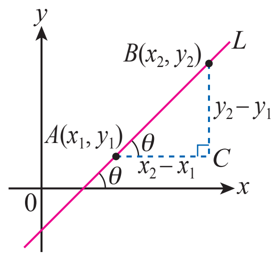
AKTIVITI 2

1. Dengan menggunakan perisian *GeoGebra*, lukis garis lurus L_1 dan garis lurus L_2 yang berserenjang antara satu sama lain pada satah Cartes.
2. Catatkan kecerunan L_1 dan L_2 dan tentukan hasil darab kecerunan L_1 dan L_2.
3. Gerakkan garis Lurus L_1 atau L_2 dan perhatikan perubahan dalam kecerunan L_1 dan L_2 serta hasil darab kecerunannya.
4. Apakah yang dapat anda katakan tentang hubungan antara kecerunan bagi L_1 dan L_2 itu?
5. Ukur θ_1 dan θ_2, iaitu sudut yang terbentuk antara garis lurus L_1 dan L_2 masing-masing dengan arah positif paksi-x. Seterusnya, tentukan hasil darab tan θ_1 dan tan θ_2.
6. Apakah hubungan antara tan θ_1 dan tan θ_2? Jelaskan.
7. Bersama-sama ahli kumpulan, sahkan hubungan yang anda peroleh dalam Langkah 4 dengan keputusan yang anda peroleh dalam langkah 6.

2. Setiap kumpulan melantik seorang wakil untuk membuat pembentangan mengenai hasil dapatan masing-masing di hadapan kelas.

BAB 7

Kita telah mempelajari bahawa kecerunan, m, bagi suatu garis lurus L yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan titik $B(x_2, y_2)$ diberi oleh rumus:



$$\text{Kecerunan, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

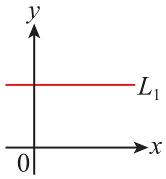
Seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah, dalam ΔABC,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{BC}{AC}$$
$$m = \tan \theta$$

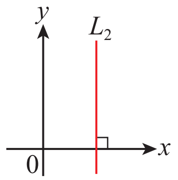
Jadi, definisi kecerunan, m, bagi suatu garis lurus ialah:

> $m = \tan \theta$
> dengan θ ialah sudut yang terbentuk bagi suatu garis lurus dengan arah positif paksi-x dan $0° \leqslant \theta < 180°$.

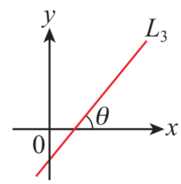
Rajah berikut menunjukkan kecerunan bagi suatu garis lurus L berubah apabila θ meningkat dari 0° kepada 180°.



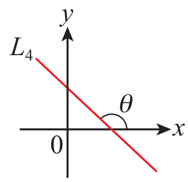
$\theta = 0°$,
$\tan \theta = \tan 0°$
$m_{L_1} = 0$



$\theta = 90°$,
$\tan \theta = \tan 90°$
m_{L_2} tak tertakrif



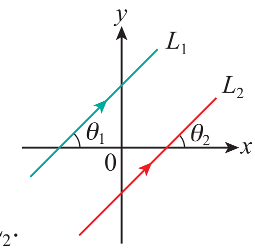
$0° < \theta < 90°$,
$\tan \theta > 0$
$m_{L_3} > 0$



$90° < \theta < 180°$,
$\tan \theta < 0$
$m_{L_4} < 0$

Maka, hasil daripada aktiviti 1 dalam Inkuiri 2, katakan m_1 dan m_2 masing-masing ialah kecerunan bagi garis lurus L_1 dan L_2. Jika garis lurus L_1 dan L_2 adalah selari, maka

$$\theta_1 = \theta_2 \leftarrow \text{Sudut sepadan, garis //}$$
$$\tan \theta_1 = \tan \theta_2$$
iaitu, $\quad m_1 = m_2$

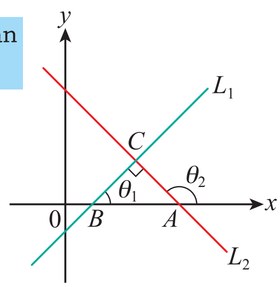


Sebaliknya, jika $m_1 = m_2$, kita dapati $\theta_1 = \theta_2$ dan L_1 adalah selari dengan L_2.

> Dua garis lurus, L_1 dan L_2 adalah selari antara satu sama lain jika dan hanya jika $m_1 = m_2$.

Hasil daripada aktiviti 2 dalam Inkuiri 2 pula, katakan m_1 dan m_2 masing-masing ialah kecerunan bagi garis lurus L_1 dan L_2 dan $\theta_1 \neq 0$.

$$\theta_2 = 90° + \theta_1 \leftarrow \text{Sudut peluaran bagi } \Delta$$
$$\tan \theta_2 = \tan (90° + \theta_1)$$
$$\tan \theta_2 = -\frac{1}{\tan \theta_1}$$
$$\tan \theta_1 \tan \theta_2 = -1$$
iaitu, $\quad m_1 m_2 = -1$



TIP PINTAR

Dalam ΔABC,

$\tan \theta_1 = \dfrac{AC}{BC}$

$\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{\tan \theta_1}$

Jadi, $\tan \theta_2 = -\dfrac{BC}{AC}$

$= -\dfrac{1}{\tan \theta_1}$

Sebaliknya, jika $m_1 m_2 = -1$ kita dapati $\theta_2 = 90° + \theta_1$ dan L_1 berserenjang dengan L_2.

Dua garis lurus, L_1 dan L_2 adalah berserenjang antara satu sama lain jika dan hanya jika $m_1 m_2 = -1$.

Contoh 5

(a) Tunjukkan sama ada garis lurus $6x + 9y = 7$ dan $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ adalah selari atau tidak.

(b) Garis lurus $y = 4 - \frac{k}{3}x$, dengan keadaan k ialah pemalar adalah selari dengan garis lurus $2x + 3y = 9$. Cari nilai k.

Penyelesaian

(a) Tulis persamaan $6x + 9y = 7$ dalam bentuk kecerunan.

$$6x + 9y = 7$$
$$9y = -6x + 7$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{9}$$

Susun dalam bentuk kecerunan, $y = mx + c$

Kecerunan, $m_1 = -\frac{2}{3}$

Bagi persamaan garis lurus $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$,

Garis lurus bentuk pintasan

Kecerunan, $m_2 = -\frac{b}{a}$

$= -\frac{2}{3}$

Oleh sebab kedua-dua garis lurus itu mempunyai kecerunan yang sama, maka kedua-duanya adalah selari.

(b) $y = 4 - \frac{k}{3}x$

$y = -\frac{k}{3}x + 4$

Kecerunan, $m_1 = -\frac{k}{3}$

$2x + 3y = 9$

$3y = -2x + 9$

$y = -\frac{2}{3}x + 3$

Bentuk kecerunan, $y = mx + c$

Kecerunan, $m_2 = -\frac{2}{3}$

Oleh sebab kedua-dua garis lurus adalah selari, maka

$$m_1 = m_2$$
$$-\frac{k}{3} = -\frac{2}{3}$$
$$k = 2$$

POKET MATEMATIK

- **Bentuk kecerunan**
  $y = mx + c$, dengan m ialah kecerunan dan c ialah pintasan-y.
- **Bentuk pintasan**
  $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$, dengan a dan b masing-masing ialah pintasan-x dan pintasan-y, dan kecerunannya ialah $-\frac{b}{a}$.

BAB 7

Contoh 6

(a) Tentukan sama ada garis lurus $y - 3x = 5$ dan $3y + x - 12 = 0$ berserenjang atau tidak.

(b) Bucu-bucu bagi sebuah segi tiga ABC ialah $A(0, -5)$, $B(2, 1)$ dan $C(-7, k)$, dengan keadaan k ialah pemalar. Cari nilai k jika $\angle ABC = 90°$.

Penyelesaian

(a) Tulis kedua-dua persamaan itu dalam bentuk kecerunan untuk mencari kecerunannya.

$$y - 3x = 5$$
$$y = 3x + 5$$

Kecerunan, $m_1 = 3$

$$3y + x - 12 = 0$$
$$3y = -x + 12$$
$$y = -\frac{1}{3}x + 4$$

Kecerunan, $m_2 = -\frac{1}{3}$

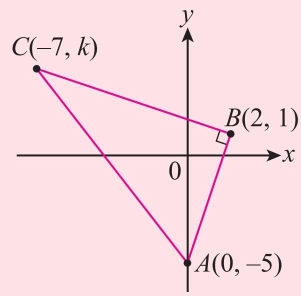
Didapati, $m_1m_2 = 3\left(-\frac{1}{3}\right)$

$= -1$

Maka, garis lurus $y - 3x = 5$ dan $3y + x - 12 = 0$ berserenjang antara satu sama lain.

(b) Oleh sebab $\angle ABC = 90°$,

$$m_{AB}m_{BC} = -1$$
$$\left(\frac{1-(-5)}{2-0}\right)\left(\frac{k-1}{-7-2}\right) = -1$$
$$3\left(\frac{k-1}{-9}\right) = -1$$
$$k - 1 = 3$$
$$k = 4$$



Cabar Minda

Adakah teorem Pythagoras boleh digunakan untuk mengesahkan jawapan dalam Contoh 6(b)?

Latih Diri 7.4

1. Tentukan sama ada pasangan garis lurus berikut selari atau serenjang antara satu sama lain.

(a) $2x + 3y = 9$ dan $4x + 6y = 0$

(b) $y = \frac{3}{4}x - 5$ dan $4y - 3x = 12$

(c) $x - 2y = 6$ dan $2x + y = 5$

(d) $2x + 3y = 9$ dan $2y = 3x + 10$

2. Pasangan garis lurus berikut adalah selari, dengan keadaan p ialah pemalar. Cari nilai p.

(a) $2y = 10 - x$ dan $y = 3px - 1$

(b) $\frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 1$ dan $py = 4x - 6$

3. Pasangan garis lurus berikut adalah berserenjang antara satu sama lain. Cari nilai pemalar k.

(a) $3x + 5y = 15$ dan $5x - ky = 2$

(b) $\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$ dan $ky = 2x - 7$

4. Bucu-bucu bagi sebuah segi tiga ABC ialah $A(1, 1)$, $B(-1, 4)$, dan $C(5, a)$. Cari nilai pemalar a jika AB berserenjang dengan BC.

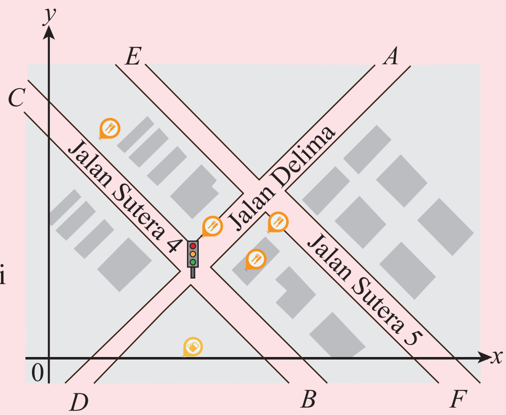
7.2.1

Menyelesaikan masalah melibatkan persamaan garis lurus selari dan garis lurus serenjang

Contoh 7 APLIKASI MATEMATIK

Rajah di sebelah menunjukkan kedudukan jalan raya AD, BC dan EF yang dilukis pada satah Cartes. AD dan BC adalah berserenjang antara satu sama lain yang bertemu di satu persimpangan lampu isyarat manakala BC dan EF adalah selari. Diberi bahawa koordinat A ialah $(18, 16)$ dan $F(20, -1)$ manakala persamaan bagi jalan raya BC ialah $5y + 4x = 70$, cari

(a) persamaan jalan raya EF,
(b) persamaan jalan raya AD,
(c) koordinat bagi lampu isyarat itu.



Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Jalan raya AD dan BC adalah berserenjang.
- Jalan raya BC dan EF adalah selari.
- Koordinat titik A ialah $(18, 16)$, F ialah $(20, -1)$ dan persamaan jalan raya BC ialah $5y + 4x = 70$.
- Cari persamaan jalan raya EF dan AD serta koordinat lampu isyarat yang terletak di persimpangan jalan raya AD dan BC.

2. Merancang strategi

- Tulis persamaan $5y + 4x = 70$ dalam bentuk kecerunan untuk menentukan kecerunannya, m_1.
- Gunakan $m_1 = m_2$ untuk mencari kecerunan bagi jalan raya EF.
- Gunakan rumus $m_1m_2 = -1$ untuk mencari kecerunan bagi jalan raya AD.
- Gunakan rumus $y - y_1 = m(x - x_1)$ untuk mencari persamaan jalan raya EF dan AD.
- Selesaikan persamaan $5y + 4x = 70$ dan persamaan AD secara serentak untuk mencari koordinat bagi lampu isyarat.

3. Melaksanakan strategi

(a)
$$5y + 4x = 70$$
$$5y = -4x + 70$$
$$y = -\frac{4}{5}x + 14$$

Kecerunan, $m_1 = -\frac{4}{5}$, maka kecerunan EF yang selari dengan BC ialah $-\frac{4}{5}$.

Persamaan jalan raya EF yang melalui titik $F(20, -1)$ ialah

$$y - (-1) = -\frac{4}{5}(x - 20)$$
$$5y + 5 = -4x + 80$$
$$5y + 4x = 75$$

(b) Kecerunan, $m_1 = -\frac{4}{5}$, maka kecerunan jalan raya AD, m_2 yang berserenjang ialah

$$-\frac{4}{5}m_2 = -1$$
$$m_2 = \frac{5}{4}$$

Persamaan jalan raya AD yang melalui titik $A(18, 16)$ ialah

$$y - 16 = \frac{5}{4}(x - 18)$$
$$4y - 64 = 5x - 90$$
$$4y - 5x = -26$$

(c) Persamaan BC: $5y + 4x = 70$ $\cdots$ ①
Persamaan AD: $4y - 5x = -26$ $\cdots$ ②
① × ⑤: $25y + 20x = 350$ $\cdots$ ③
② × ④: $16y - 20x = -104$ $\cdots$ ④
③ + ④: $41y = 246$
$y = 6$

Gantikan $y = 6$ dalam (1).

$$5(6) + 4x = 70$$
$$30 + 4x = 70$$
$$4x = 40$$
$$x = 10$$

Maka, koordinat bagi lampu isyarat ialah (10, 6).

4. Membuat refleksi

Gantikan titik $F(20, -1)$ dalam persamaan $5y + 4x = 75$.

Sebelah kiri $= 5(-1) + 4(20)$
$= 75$
$=$ sebelah kanan

Maka, $5y + 4x = 75$ ialah persamaan bagi jalan raya EF.

Gantikan titik $A(18, 16)$ dalam persamaan $4y - 5x = -26$.

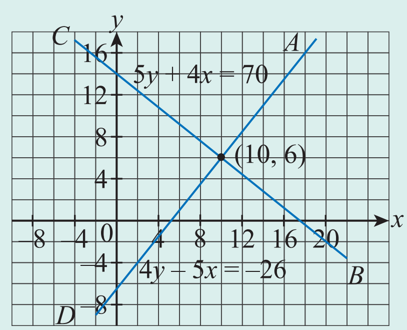
Sebelah kiri $= 4(16) - 5(18)$
$= -26$
$=$ sebelah kanan

Maka, $4y - 5x = -26$ ialah persamaan bagi jalan raya AD.

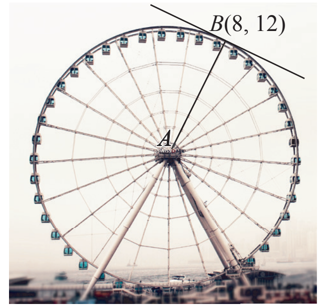
Daripada graf di sebelah, koordinat bagi lampu isyarat ialah (10, 6).

IMBAS KEMBALI

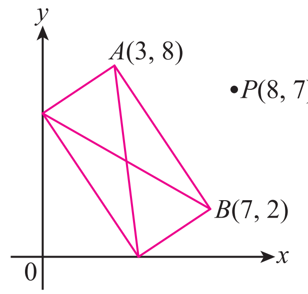
Persamaan garis lurus dengan kecerunan m dan melalui titik (x_1, y_1) ialah $y - y_1 = m(x - x_1)$



Latih Diri 7.5



1. Dalam rajah di sebelah, jejari AB bagi sebuah roda Ferris berserenjang dengan garis tangen kepada bulatan di titik $B(8, 12)$. Persamaan tangen kepada bulatan itu di titik B diberi sebagai $3x + 2y = 48$. Cari persamaan bagi jejari, AB, roda Ferris itu.



2. Rajah di sebelah menunjukkan pelan sebuah bangsal berbentuk segi empat tepat dilukis di atas satah Cartes. Sebatang paip yang paling pendek akan disambung dari paip utama di titik $P(8, 7)$ ke bangsal. Cari
(a) koordinat titik paip yang disambung di bangsal,
(b) panjang longkang yang perlu dibuat untuk menanam paip itu ke bangsal.

Latihan Intensif 7.2

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2YsKN0N untuk kuiz

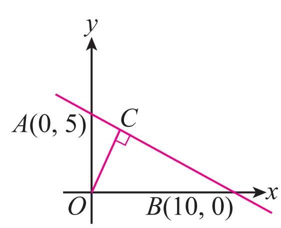
1. Untuk setiap yang berikut, tentukan sama ada garis AB dan CD adalah selari atau berserenjang antara satu sama lain.
(a) $A(6, 2)$, $B(3, 4)$, $C(3, –1)$, $D(–3, 3)$
(b) $A(4, –3)$, $B(–3, 4)$, $C(1, 4)$, $D(–2, 1)$

2. Diberi $A(1, 2)$, $B(6, 8)$ dan $C(12, k)$ ialah bucu-bucu sebuah segi tiga, dengan keadaan $\angle ABC = 90°$, cari nilai k.

3. Diberi $P(7, 3)$, $Q(2, 2)$ dan $R(-1, 4)$. Cari
(a) persamaan garis lurus yang melalui titik P dan selari dengan QR,
(b) persamaan garis lurus yang melalui titik R dan berserenjang dengan QR.
Seterusnya, cari koordinat S dengan keadaan kedua-dua garis itu bersilang.

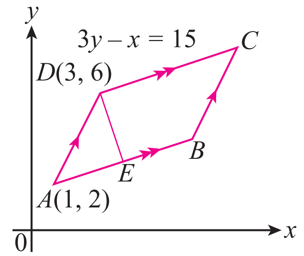
4. Koordinat bagi tiga titik ialah $P(-1, -6)$, $Q(3, -12)$ dan $R(e, 6)$. Cari nilai pemalar e jika
(a) P, Q dan R adalah segaris,
(b) PQ adalah berserenjang dengan PR.

5. Diberi empat titik, $P(–6, 1)$, $Q(1, –2)$, $R(0, 5)$ dan $S(–3, h)$. Jika PQ berserenjang dengan RS, cari nilai pemalar h.

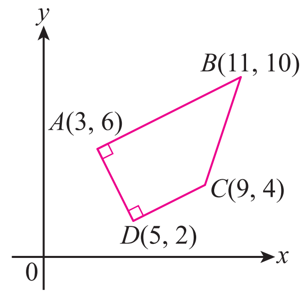


6. Dalam rajah di sebelah, OC berserenjang dari asalan O ke garis lurus AB, dengan keadaan titik A ialah $(0, 5)$ dan titik B ialah $(10, 0)$. Cari
(a) persamaan garis lurus AB dan OC,
(b) koordinat C dan jarak OC.

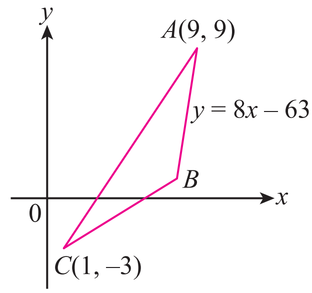
7. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi empat selari $ABCD$. Titik A dan D masing-masing ialah $(1, 2)$ dan $(3, 6)$. Persamaan bagi garis lurus DC ialah $3y - x = 15$. DE ialah pembahagi dua sama serenjang bagi AB. Cari
(a) persamaan AB dan DE,
(b) koordinat E dan B.



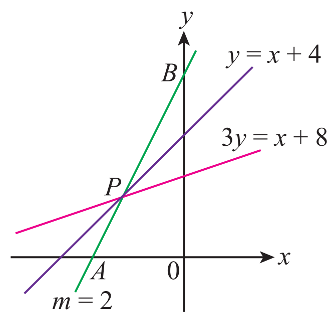
8. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah trapezium $ABCD$. Koordinat A, B, C dan D masing-masing ialah $A(3, 6)$, $B(11, 10)$, $C(9, 4)$ dan $D(5, 2)$.
(a) Tentukan pasangan garis lurus selari dan serenjang.
(b) Cari persamaan garis lurus AB.
(c) Satu garis lurus melalui titik C dan berserenjang dengan AB. Cari persamaan garis lurus tersebut. Tunjukkan bahawa garis lurus tersebut melalui titik tengah AB.



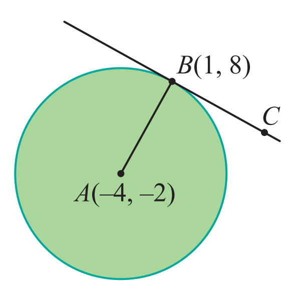
9. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga ABC, dengan keadaan $A(9, 9)$ dan $C(1, –3)$. Titik B terletak di atas pembahagi dua sama serenjang AC dan persamaan bagi garis lurus AB ialah $y = 8x – 63$.
(a) Cari
  (i) persamaan pembahagi dua sama serenjang AC,
  (ii) koordinat B.
(b) Titik D terletak pada rajah dengan keadaan $ABCD$ ialah rombus.
  (i) Cari koordinat D.
  (ii) Tunjukkan bahawa $AC = 2BD$.



10. Dalam rajah di sebelah, dua garis lurus, $y = x + 4$ dan $3y = x + 8$ bersilang di titik P. Garis lurus yang melalui titik P dengan kecerunan 2 bertemu paksi-x dan paksi-y masing-masing di titik A dan titik B. Tunjukkan bahawa
(a) koordinat P ialah $(–2, 2)$,
(b) persamaan garis lurus yang melalui titik P dan berserenjang dengan garis lurus AB ialah $2y + x = 2$,
(c) koordinat A ialah $(–3, 0)$ dan koordinat B ialah $(0, 6)$,
(d) nisbah $\dfrac{AP}{PB}$ ialah $\dfrac{1}{2}$.



11. Dalam rajah di sebelah, BC ialah tangen kepada bulatan berpusat $A(–4, –2)$ di titik $B(1, 8)$. Cari persamaan garis tangen BC.



BAB 7

7.3 Luas Poligon

Menerbitkan rumus luas segi tiga

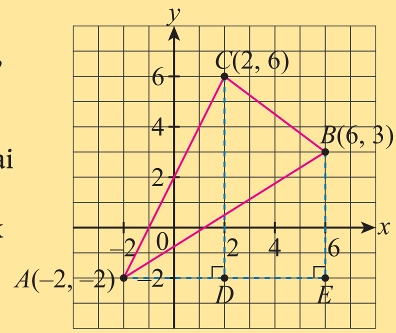
Dalam satah Cartes, apabila bucu-bucu suatu poligon diketahui, kita boleh menggunakan rumus untuk mencari luasnya. Ikuti penerokaan berikut untuk menerbitkan rumus luas suatu segi tiga apabila koordinat setiap bucunya diketahui.

INKUIRI 3 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Menentukan luas segi tiga apabila koordinat setiap bucu diketahui

Arahan:

1. Dengan menggunakan perisian *GeoGebra*, lukis sebuah segi tiga dengan bucu-bucu A, B, dan C.
2. Bina garis putus-putus seperti dalam rajah di sebelah.
3. Dengan menggunakan menu arahan dalam perisian itu,
   (a) cari panjang AD, DE, BE dan CD.
   (b) cari luas ΔACD, trapezium $BCDE$ dan ΔABE.
   (c) tentukan luas ΔABC dengan menggunakan nilai-nilai yang diperoleh di (b).
4. Bincang bersama-sama ahli kumpulan anda, cara untuk mendapatkan luas segi tiga itu.
5. Adakah terdapat cara lain untuk menentukan luas segi tiga ABC?



Hasil daripada Inkuiri 3, kita boleh membuat satu generalisasi tentang cara untuk mencari luas suatu segi tiga dengan menggunakan rumus seperti berikut.

Rajah 7.2 menunjukkan sebuah segi tiga ABC, dengan kedudukan $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dan $C(x_3, y_3)$ disusun mengikut tertib.

Luas ΔABC

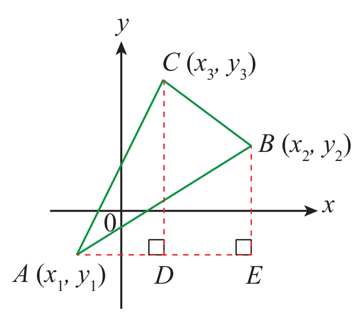
$= \text{luas } \Delta ACD + \text{luas trapezium } BCDE - \text{luas } \Delta ABE$

$$= \left(\frac{1}{2} \times AD \times CD\right) + \left(\frac{1}{2} \times DE \times (BE + CD)\right) - \left(\frac{1}{2} \times AE \times BE\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)[(y_2 - y_1) + (y_3 - y_1)]$$
$$\quad - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$= \frac{1}{2}(x_3y_3 - x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_2y_1 - x_3y_2$$
$$\quad + x_3y_1 - x_3y_3 + x_3y_1 - x_2y_2 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_1y_1)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$



Rajah 7.2

Rumus luas ini boleh disusun dan ditulis sebagai:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

dengan hasil tambah bagi semua hasil darab dalam arah $\searrow$ diberi tanda positif, iaitu $\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1)$ dan hasil tambah bagi semua hasil darab dalam arah $\nearrow$ diberi tanda negatif, iaitu $\frac{1}{2}(-x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$.

Maka, rumus bagi luas suatu segi tiga ABC dengan bucu-bucu $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dan $C(x_3, y_3)$ disusun mengikut tertib boleh ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} \text{Luas } \Delta ABC &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left| x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3 \right| \\ &= \frac{1}{2}\left| (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3) \right| \end{aligned}$$

Menentukan luas segi tiga dengan menggunakan rumus

Contoh 8

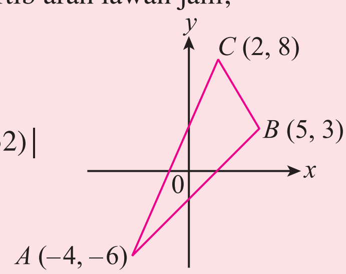
Cari luas ΔABC dengan bucu-bucunya ialah $A(-4, -6)$, $B(5, 3)$ dan $C(2, 8)$.

Penyelesaian

Jika koordinat disusun mengikut tertib arah lawan jam,

luas ΔABC

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 5 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & 8 & -6 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left| (-12 + 40 - 12) - (-30 + 6 - 32) \right| \\ &= \frac{1}{2}\left| 72 \right| \\ &= 36 \text{ unit}^2 \end{aligned}$$



Jika koordinat disusun mengikut tertib arah jam,

$$\begin{aligned} \text{luas } \Delta ABC &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 & -4 \\ -6 & 8 & 3 & -6 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left| (-32 + 6 - 30) - (-12 + 40 - 12) \right| \\ &= \frac{1}{2}\left| -72 \right| \leftarrow \text{Ambil nilai mutlak} \\ &= \frac{1}{2}(72) \\ &= 36 \text{ unit}^2 \end{aligned}$$

7.3.1 7.3.2

POKET MATEMATIK

Rumus di sebelah dikenali sebagai algoritma *shoelace* yang hanya digunakan apabila kedudukan bucu berada dalam tertib arah lawan jam. Jika bucu-bucu diambil dalam tertib arah jam, jawapan yang diperoleh adalah bernilai negatif. Dalam kes ini, nilai mutlak perlu digunakan supaya luas bernilai positif. Rumus ini boleh dimulakan dengan memilih mana-mana satu bucu terlebih dahulu.

TIP PINTAR

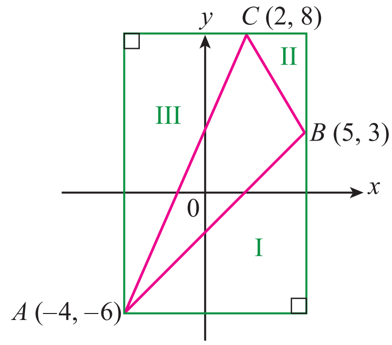
Sebahagian kuantiti yang kita temui dalam kehidupan harian hanya mempunyai magnitud sahaja, tidak melibatkan arah seperti suhu, jisim, jarak, luas dan isi padu. Misalnya, luas bagi ΔABC ialah 36 unit². Maka, 36 unit² ialah saiz atau magnitud bagi luas ΔABC. Kuantiti seperti ini dikenali sebagai kuantiti skalar.

POKET MATEMATIK

Rumus *shoelace* digunakan untuk mencari luas poligon apabila koordinat setiap bucu diketahui. Dua garis mencancang dalam rumus ini dikenali sebagai nilai mutlak yang berfungsi untuk memastikan bahawa ukuran luas sentiasa bernilai positif. Nota penting: Ukuran luas poligon hanya mengambil nilai positif sahaja.

Selain menggunakan rumus *shoelace*, kaedah kotak seperti berikut juga boleh digunakan untuk mencari luas suatu segi tiga dalam Contoh 8.

Langkah 1 Lukis segi empat tepat yang menyentuh setiap bucu segi tiga ABC. Tandakan segi tiga yang terbentuk dalam kotak itu dengan I, II, dan III seperti dalam rajah di sebelah.



Langkah 2 Cari luas segi empat tepat dengan mendarabkan panjang dan lebarnya.

Luas segi empat tepat $= 9 \times 14$

$= 126$ unit^2

Langkah 3 Cari luas segi tiga I, II dan III dalam segi empat tepat itu.

Luas segi tiga I $= \frac{1}{2} \times 9 \times 9 = 40\frac{1}{2}$ unit^2

Luas segi tiga II $= \frac{1}{2} \times 3 \times 5 = 7\frac{1}{2}$ unit^2

Luas segi tiga III $= \frac{1}{2} \times 6 \times 14 = 42$ unit^2

Langkah 4 Tolakkan setiap luas segi tiga yang diperoleh dalam langkah 3 daripada luas segi empat tepat untuk menentukan luas ΔABC.

Luas $\Delta ABC = 126 - 40\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2} - 42$

$= 36$ unit^2

SUMBANG SARAN

Apakah yang dapat anda katakan tentang tiga titik $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dan $C(x_3, y_3)$ jika luas $\Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = 0$?

Contoh 9

Koordinat bagi bucu-bucu sebuah segi tiga ABC ialah $A(8, 5)$, $B(-2, -3)$ dan $C(k, -1)$. Cari nilai-nilai yang mungkin bagi k jika luas segi tiga ABC ialah 18 unit^2.

Penyelesaian

Oleh sebab urutan bucu bagi segi tiga ABC tidak diketahui, luasnya mungkin bernilai positif atau negatif.

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 8 & -2 & k & 8 \\ 5 & -3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$18 = \frac{1}{2}\left|(-24 + 2 + 5k) - (-10 - 3k - 8)\right|$$

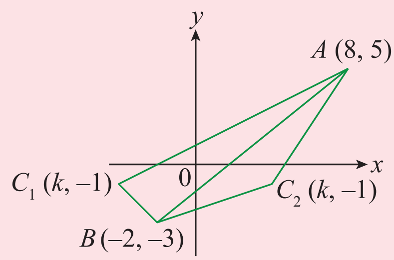
$$\pm 18 = \frac{1}{2}(8k - 4)$$

$\frac{1}{2}(8k - 4) = -18$ atau $\frac{1}{2}(8k - 4) = 18$

$8k - 4 = -36$ $\qquad$ $8k - 4 = 36$

$8k = -32$ $\qquad$ $8k = 40$

$k = -4$ $\qquad$ $k = 5$



Maka, nilai-nilai yang mungkin bagi k ialah -4 dan 5.

Latih Diri 7.6

1. Cari luas segi tiga dengan bucu-bucu yang diberi seperti berikut.
   (a) $(5, 10), (2, 1), (8, 3)$
   (b) $(3, 1), (6, 4), (-4, 2)$
   (c) $(-4, -3), (5, 1), (2, 6)$

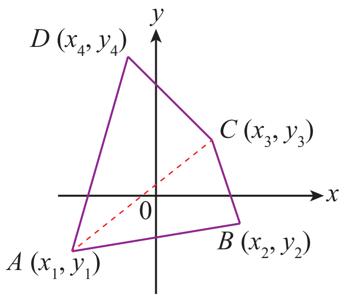
2. Bucu-bucu P dan Q masing-masing ialah $(3, 4)$ dan $(1, -2)$, dan bucu R terletak pada paksi-x. Cari koordinat R yang mungkin, dengan keadaan luas ΔPQR ialah 10 unit^2.

3. Tunjukkan bahawa titik-titik $(8, 4), (2, 1)$ dan $(-2, -1)$ adalah segaris.

4. Titik $E(-2, -1), F(2, p)$ dan $G(10, 5)$ adalah segaris. Cari nilai p.

5. Bucu-bucu dan luas bagi ΔABC diberi seperti berikut, Cari nilai-nilai yang mungkin bagi k.
   (a) $A(-4, -1), B(5, 3), C(-1, k)$; luas $\Delta ABC = 15$ unit^2
   (b) $A(5, k), B(3, 7), C(1, 3)$; luas $\Delta ABC = 10$ unit^2
   (c) $A(1, -2), B(k, 6), C(1, 2)$; luas $\Delta ABC = 12$ unit^2
   (d) $A(3, 0), B(4, k), C(1, 4)$; luas $\Delta ABC = 5$ unit^2

Menentukan luas sisi empat dengan menggunakan rumus



Pertimbangkan sisi empat $ABCD$ dalam rajah di sebelah, dengan bucu-bucu $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ dan $D(x_4, y_4)$ disusun mengikut tertib.

Luas sisi empat $ABCD$

$$= \text{luas } \Delta ABC + \text{luas } \Delta ACD$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)]$$

$$+ \frac{1}{2}[(x_1y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_3y_1 + x_4y_3 + x_1y_4)]$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$

Daripada kembangan ungkapan di atas, kita dapati rumus yang diperoleh adalah serupa dengan rumus untuk luas segi tiga.

Secara amnya, luas sisi empat $ABCD$ dengan bucu-bucu $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ dan $D(x_4, y_4)$ disusun mengikut tertib boleh ditulis sebagai:

$$\text{Luas sisi empat } ABCD = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\right|$$

7.3.2 7.3.3

BAB 7

Contoh 10

Cari luas sisi empat $PQRS$ dengan bucu-bucu $P(3, 5)$, $Q(–1, 3)$, $R(2, –3)$ dan $S(4, 1)$.

Penyelesaian

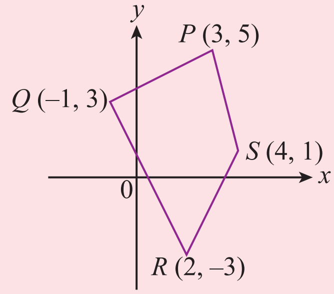
Susun bucu-bucu mengikut tertib:

$$\text{Luas sisi empat } PQRS = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}|(9 + 3 + 2 + 20) – (–5 + 6 – 12 + 3)|$$

$$= \frac{1}{2}|42|$$

$$= 21 \text{ unit}^2$$



Latih Diri 7.7

1. Cari luas sisi empat dengan bucu-bucu yang diberi seperti berikut.
(a) $(1, 7)$, $(–5, 6)$, $(–2, –4)$ dan $(2, –3)$
(b) $(2, 9)$, $(–6, 4)$, $(–1, –3)$ dan $(8, 1)$
(c) $(0, 2)$, $(–6, –2)$, $(–3, –5)$ dan $(–1, –3)$
(d) $(3, 4)$, $(–2, 0)$, $(2, –4)$ dan $(5, 1)$

2. Bucu-bucu sebuah sisi empat $ABCD$ yang disusun mengikut tertib ialah $A(k, 6)$, $B(–2, 1)$, $C(4, 5)$ dan $D(2, 8)$. Jika luas sisi empat $ABCD$ ialah 30 unit², cari nilai k.

Membuat generalisasi tentang rumus luas poligon

Idea untuk mencari luas segi tiga boleh digunakan untuk membuktikan bahawa luas suatu poligon n-sisi dengan bucu-bucu $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$, …, $N(x_n, y_n)$ adalah seperti berikut.

Luas poligon

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \cdots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

$= \frac{1}{2}$[(hasil tambah bagi semua hasil darab $\searrow$) – (hasil tambah bagi semua hasil darab $\nearrow$)]

dengan bucu-bucu $A, B, C, D, \ldots, N$ disusun mengikut tertib.

Secara amnya, jika bucu-bucu poligon n-sisi $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$, …, $N(x_n, y_n)$ disusun mengikut tertib, maka:

$$\text{Luas poligon} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

SUMBANG SARAN

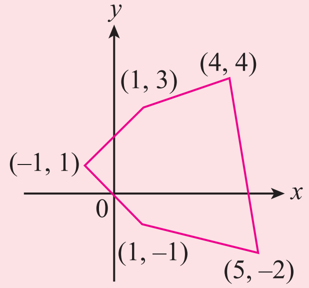
Layari Internet untuk meneroka *convex polygon* dan *concave polygon*. Bincang dengan rakan anda sama ada rumus luas poligon boleh digunakan untuk *concave polygon*.

Contoh 11

Cari luas sebuah pentagon dengan bucu-bucunya ialah (5, –2), (1, –1), (–1, 1), (1, 3) dan (4, 4).

Penyelesaian

Dengan memplot bucu-bucu pentagon seperti dalam rajah di sebelah, bucu-bucu yang disusun mengikut tertib ialah (4, 4), (1, 3), (–1, 1), (1, –1) dan (5, –2).



$$\begin{aligned}\text{Luas pentagon} &= \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}4 & 1 & -1 & 1 & 5 & 4\\ 4 & 3 & 1 & -1 & -2 & 4\end{matrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|(12+1+1-2+20)-(4-3+1-5-8)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|43\right| \\ &= 21\frac{1}{2}\text{ unit}^2\end{aligned}$$

Latih Diri 7.8

1. Sebuah pentagon *ABCDE* mempunyai bucu-bucu $A(-2, -5)$, $B(3, 2)$, $C(2, 8)$, $D(0, 9)$ dan $E(-3, 1)$. Cari luas pentagon *ABCDE*.

2. Bucu-bucu sebuah heksagon ialah (0, –1), (–3, –1), (–4, 2), (–2, 6), (1, 5) dan (2, 1). Cari luas heksagon tersebut.

Menyelesaikan masalah yang melibatkan luas poligon

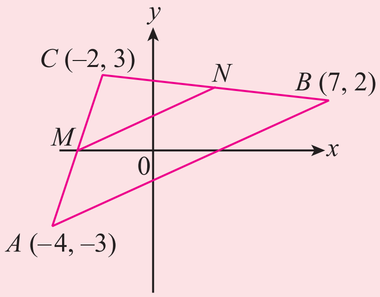
Contoh 12

Bucu-bucu bagi sebuah segi tiga *ABC* ialah $A(-4, -3)$, $B(7, 2)$ dan $C(-2, 3)$. *M* dan *N* masing-masing ialah titik tengah bagi sisi *AC* dan *BC*. Cari

(a) koordinat *M* dan *N*,

(b) nisbah luas segi tiga *CMN* kepada luas sisi empat *ABNM*.

Penyelesaian



(a) $\text{Koordinat } M = \left(\frac{-4+(-2)}{2}, \frac{-3+3}{2}\right)$

$= (-3, 0)$

$\text{Koordinat } N = \left(\frac{-2+7}{2}, \frac{3+2}{2}\right)$

$= \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

(b) Luas segi tiga $CMN = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -3 & \frac{5}{2} & -2 \\ 3 & 0 & \frac{5}{2} & 3 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left|\left(0 - \frac{15}{2} + \frac{15}{2}\right) - (-9 + 0 - 5)\right|$

$= \frac{1}{2}|14|$

$= 7 \text{ unit}^2$

Luas sisi empat $ABNM = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 7 & \frac{5}{2} & -3 & -4 \\ -3 & 2 & \frac{5}{2} & 0 & -3 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left|\left(-8 + \frac{35}{2} + 0 + 9\right) - \left(-21 + 5 - \frac{15}{2} + 0\right)\right|$

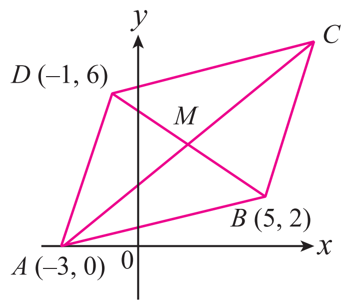
$= \frac{1}{2}|42|$

$= 21 \text{ unit}^2$

Maka, nisbah luas segi tiga *CMN* kepada luas sisi empat *ABNM* ialah 7 : 21 = 1 : 3.

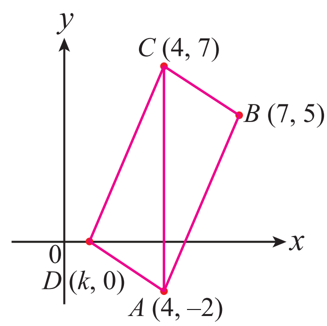
Latih Diri 7.9

1. Dalam rajah di sebelah, titik $A(-3, 0)$, $B(5, 2)$, C dan $D(-1, 6)$ ialah bucu-bucu sebuah segi empat selari *ABCD*. *M* ialah titik persilangan pepenjuru *AC* dan *BD*. Cari
(a) koordinat *C* dan *M*,
(b) nisbah luas ΔABM kepada luas segi empat selari *ABCD*.



2. Garis lurus $y = 8 - 2x$ menyilang garis lurus $y = k$, paksi-x dan paksi-y masing-masing di titik P, Q dan R. Diberi bahawa luas bagi ΔOPR ialah 12 unit², dengan O ialah asalan, cari
(a) nilai terkecil k,
(b) koordinat P.

3. Dalam rajah di sebelah, *ABCD* ialah sebuah segi empat selari dengan bucu-bucu $A(4, -2)$, $B(7, 5)$, $C(4, 7)$ dan $D(k, 0)$. Cari
(a) luas ΔABC,
(b) nilai k jika luas ΔACD sama dengan luas ΔABC,
(c) koordinat E jika *ACBE* ialah sebuah segi empat selari,
(d) luas segi empat selari *ACBE*.



Latihan Intensif 7.3

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/30UAyQq untuk kuiz

1. $ABCD$ ialah sebuah segi empat selari dengan pepenjuru-pepenjurunya bertemu di E. Diberi $A(-5, 3)$, $B(0, -2)$ dan $C(3, 5)$, cari
(a) koordinat D dan E,
(b) luas segi empat selari $ABCD$.

2. $PQRS$ ialah sebuah rombus dengan koordinat $P(3, 3)$, $Q(h, 3)$, $R(-5, -1)$ dan $S(0, k)$. Cari
(a) nilai h dan nilai k,
(b) luas rombus $PQRS$.

3. Diberi tiga titik, $A(-1, -5)$, $B(2, 1)$ dan $C(6, 9)$,
(a) cari luas ΔABC,
(b) berdasarkan jawapan di (a), apakah yang dapat anda katakan tentang titik A, B dan C?

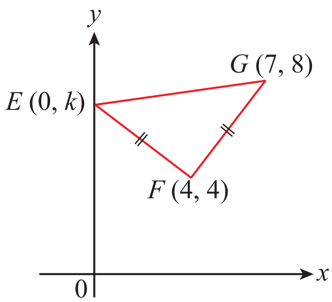
4. Cari luas bagi poligon dengan bucu-bucu $(5, 2)$, $(-1, -3)$, $(2, 6)$, $(3, -2)$, $(-4, 0)$ dan $(-3, 2)$.

5. Titik $A(5, -1)$, $B(3, 3)$ dan $C(-6, p)$ ialah bucu-bucu sebuah segi tiga. Cari nilai-nilai p jika luas ΔABC ialah 16 unit^2.

6. Diberi tiga titik, $P(2, 2r - 1)$, $Q(r - 1, r + 1)$ dan $R(r + 3, 0)$. Jika titik P, Q dan R terletak di atas satu garis lurus yang sama, cari nilai-nilai yang mungkin bagi r.

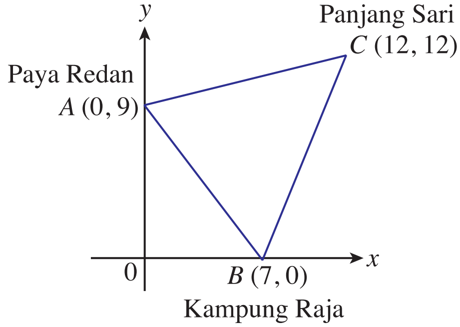
7. Tiga titik mempunyai koordinat $A(8, a)$, $B(-1, 2)$ dan $C(3, 10)$. Cari nilai a jika
(a) A, B dan C adalah segaris,
(b) luas ΔABC ialah 12 unit^2.

8. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga sama kaki EFG dengan bucu-bucu $E(0, k)$, $F(4, 4)$ dan $G(7, 8)$. EF dan FG adalah sama panjang.
(a) Cari nilai k.
(b) H ialah titik di atas garis $y = 11$ dengan keadaan $EH = GH$. Cari
(i) koordinat H,
(ii) nisbah luas ΔEFG kepada luas sisi empat $EFGH$.



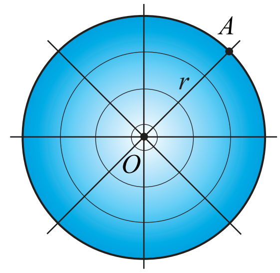
9. Titik-titik $O(0, 0)$, $P(m + 1, m - 7)$, $Q(2m + 1, 2m)$ dan $R(m, m + 6)$ adalah bucu-bucu sebuah sisi empat dengan keadaan $m > 0$.
(a) Jika luas $OPQR$ ialah $34\frac{1}{2}$ unit^2, cari nilai m.
(b) Seterusnya, cari luas ΔOPR.

10. Koordinat bagi tiga stesen LRT, Paya Redan, Kampung Raja dan Panjang Sari masing-masing diwakili oleh titik $A(0, 9)$, $B(7, 0)$ dan $C(12, 12)$, dengan keadaan 1 unit mewakili 100 m. Cari
(a) jarak, dalam km, antara stesen LRT Paya Redan dan Kampung Raja.
(b) luas sebenar, dalam km^2, segi tiga yang dicakupi oleh tiga stesen itu.



7.4 Persamaan Lokus

Lokus bagi suatu titik bergerak ialah lintasan yang dilalui oleh titik itu mengikut syarat yang ditetapkan. Misalnya, lintasan yang disurih oleh titik A yang bergerak sebanyak r unit dari titik tetap O dalam radar pesawat di sebuah pusat kawalan lalu lintas udara di sebelah merupakan suatu lokus yang berbentuk bulatan dan boleh diwakili oleh persamaan. Bolehkah anda tentukan persamaan lokus titik bergerak, A yang berbentuk bulatan itu?



Menentukan persamaan lokus

Persamaan lokus bagi suatu titik bergerak yang memenuhi syarat-syarat tertentu boleh ditentukan dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik atau rumus lain mengikut syarat yang diberi.

A Lokus suatu titik bergerak dari suatu titik tetap adalah malar

INKUIRI 4 Berkumpulan

Tujuan: Meneroka bentuk dan menentukan persamaan lokus bagi titik bergerak dari suatu titik tetap adalah malar

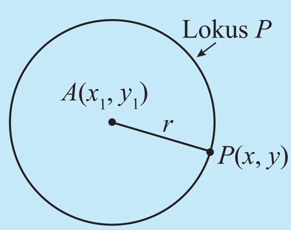
Arahan:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Katakan $P(x, y)$ ialah satu titik berjarak r unit dari satu titik tetap $A(x_1, y_1)$ dengan keadaan $r > 0$.
3. Gerakkan titik P dan perhatikan laluan yang disurih oleh titik P.
4. Apakah bentuk lokus titik P yang terhasil?
5. Dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik, tulis persamaan bagi bentuk yang terhasil itu dalam sebutan x, y, x_1, y_1 dan r.

ggbm.at/wtjxrkf5

Hasil daripada Inkuiri 4, bentuk lokus titik P yang terhasil merupakan satu bulatan dengan pusat $A(x_1, y_1)$ dan berjejari r unit. Persamaan lokus bagi titik bergerak $P(x, y)$ yang jaraknya sentiasa malar dari satu titik tetap $A(x_1, y_1)$ boleh ditentukan dengan menggunakan rumus jarak seperti berikut:

$$PA = r$$
$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = r$$
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2, \text{ dengan keadaan } r > 0$$



Contoh 13

Cari persamaan lokus bagi titik bergerak P supaya jaraknya dari titik $A(4, -3)$ ialah 6 unit.

Penyelesaian

Katakan koordinat titik P ialah (x, y).

Jarak P dari $A = 6$

$$\sqrt{(x-4)^2 + [y-(-3)]^2} = 6$$

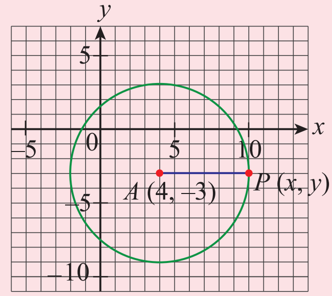
$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 36$$

Kuasa duakan di kedua-dua belah persamaan

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$$

Maka, persamaan lokus P ialah $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$.



B Nisbah jarak titik bergerak dari dua titik tetap adalah malar

INKUIRI 5 Berkumpulan

Tujuan: Meneroka bentuk dan menentukan persamaan lokus bagi titik bergerak yang nisbah jaraknya dari dua titik tetap adalah malar

ggbm.at/jdg63efh

Arahan:

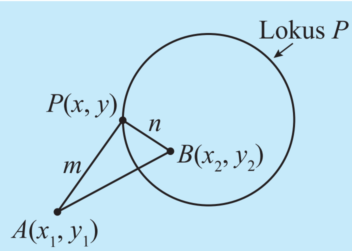
1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Katakan $P(x, y)$ ialah titik bergerak dengan keadaan jaraknya dari dua titik tetap $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dalam nisbah $m : n$, iaitu $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$.
3. Gerakkan titik pada gelongsor ke kiri dan ke kanan supaya nisbah r berubah dan perhatikan bulatan yang terbentuk.
4. Adakah bulatan itu merupakan bentuk lokus bagi titik bergerak P? Jika ya, bolehkah anda tentukan persamaannya dalam sebutan $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, m$ dan n?
5. Seterusnya, seret gelongsor r ke kiri sekali lagi supaya nilainya ialah 1 iaitu, $PA : PB = 1 : 1$.
6. Buat satu konjektur tentang bentuk lokus titik bergerak P yang akan terhasil, jika $PA = PB$. Bolehkah anda tentukan persamaannya?

Hasil daripada Inkuiri 5, bentuk lokus titik bergerak P merupakan satu bulatan dan persamaan lokus bagi titik bergerak $P(x, y)$ yang jaraknya sentiasa malar dari dua titik tetap $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dalam nisbah $m : n$ boleh ditentukan dengan menggunakan rumus jarak seperti berikut:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}}{\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} = \frac{m^2}{n^2}$$



7.4.1

BAB 7

Apabila $PA : PB = 1 : 1$, iaitu $P(x, y)$ sentiasa berjarak sama dari dua titik tetap $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, bentuk lokus P ialah pembahagi dua sama serenjang bagi garis AB. Persamaannya ialah:

$$PA = PB$$
$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

Contoh 14

Titik P bergerak dengan jaraknya dari titik $S(1, 2)$ dan $T(4, -1)$ dalam nisbah $2 : 1$. Cari persamaan lokus bagi titik bergerak P.

Penyelesaian

Katakan $P(x, y)$ ialah titik yang bergerak.

$$\frac{PS}{PT} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}}{\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2}} = \frac{2}{1}$$

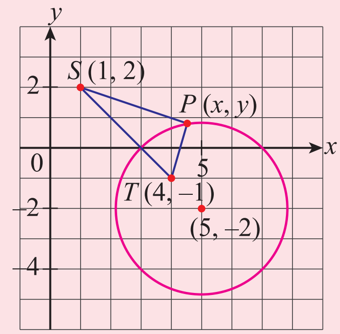
Kuasa duakan kedua-dua belah persamaan

$$\frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{(x-4)^2 + (y+1)^2} = \frac{4}{1}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4(x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1)$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 4x^2 + 4y^2 - 32x + 8y + 68$$
$$3x^2 + 3y^2 - 30x + 12y + 63 = 0$$

Bahagikan setiap sebutan dengan 3

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 21 = 0$$



Maka, persamaan lokus bagi titik bergerak P ialah $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 21 = 0$.

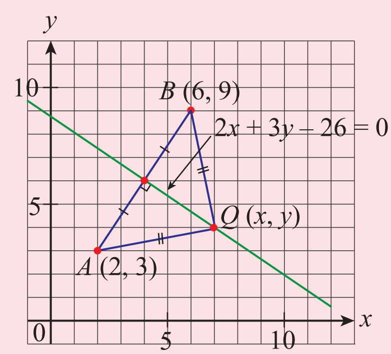
Contoh 15

Cari persamaan lokus bagi titik bergerak Q supaya jaraknya dari titik $A(2, 3)$ dan titik $B(6, 9)$ adalah sama.

Penyelesaian

Katakan $Q(x, y)$ ialah titik yang bergerak.

$$QA = QB$$
$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-9)^2}$$
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (x-6)^2 + (y-9)^2$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 18y + 81$$
$$8x + 12y - 104 = 0$$
$$2x + 3y - 26 = 0$$



Maka, persamaan lokus bagi titik bergerak Q ialah $2x + 3y - 26 = 0$.

Latih Diri 7.10

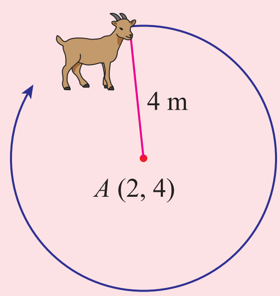
1. Cari persamaan lokus bagi titik bergerak P supaya jaraknya dari setiap titik berikut ialah 3 unit.
   (a) $(0, 0)$ (b) $(2, 3)$ (c) $(–4, 5)$ (d) $(–1, –6)$
2. Titik P bergerak dengan keadaan jaraknya sentiasa 5 unit dari $Q(–2, 1)$. Cari persamaan lokus bagi P.
3. Cari persamaan lokus bagi titik bergerak P supaya jaraknya dari titik-titik tetap berikut dalam nisbah yang diberikan.
   (a) $A(–2, 0)$, $B(4, 0)$; nisbah 1 : 2 (b) $C(–3, 0)$, $D(2, 5)$; nisbah 1 : 3
   (c) $E(0, 2)$, $F(–2, 4)$; nisbah 3 : 2 (d) $R(1, 2)$, $S(4, –1)$; nisbah 2 : 1
4. Koordinat titik J dan K masing-masing ialah $(–1, 3)$ dan $(4, 6)$. Titik Q bergerak dengan keadaan $QJ : QK = 2 : 3$. Cari persamaan lokus bagi Q.
5. Titik R bergerak supaya jaraknya dari titik $A(6, 0)$ ialah dua kali jaraknya dari titik $B(–3, 0)$. Cari persamaan lokus bagi R.
6. Titik P bergerak dalam nisbah $PO : PA = 1 : 4$, dengan O ialah asalan dan koordinat titik A ialah $(2, 0)$. Cari persamaan lokus bagi titik P.
7. Cari persamaan lokus bagi titik bergerak P supaya jaraknya dari titik-titik berikut adalah sama.
   (a) $A(–2, 0)$ dan $B(0, 4)$ (b) $C(–3, 5)$ dan $D(2, –4)$ (c) $J(2, 3)$ dan $K(6, 8)$

Menyelesaikan masalah yang melibatkan lokus

Contoh 16

APLIKASI MATEMATIK

Seekor kambing diikat dengan tali pada sebatang tiang yang terletak di tengah-tengah sebuah padang. Panjang tali yang digunakan ialah 4 meter. Kambing itu berjalan di hujung tali yang tegang mengelilingi tiang seperti dalam rajah. Jika koordinat bagi tiang ialah $A(2, 4)$, cari persamaan lokus bagi laluan kambing itu.



Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Seekor kambing diikat dengan tali sepanjang 4 meter di sebatang tiang.
- Koordinat tiang ialah $A(2, 4)$.
- Cari persamaan lokus bagi laluan kambing mengelilingi tiang dengan tali yang tegang.

2. Merancang strategi

- Laluan kambing ialah sebuah bulatan berpusat $A(2, 4)$ dan berjejari 4 meter.
- Gunakan rumus jarak antara dua titik, $d = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$ untuk mencari persamaan lokus bagi laluan kambing itu.

3. Melaksanakan strategi

Katakan $P(x, y)$ ialah satu titik yang bergerak di hujung tali pada leher kambing.

$$
\begin{aligned}
PA &= 4 \\
\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} &= 4 \\
(x-2)^2 + (y-4)^2 &= 16 \\
x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 &= 16 \\
x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 &= 0
\end{aligned}
$$

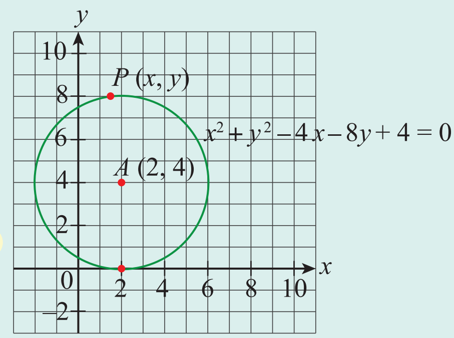
Maka, persamaan lokus bagi titik bergerak P, iaitu laluan kambing mengelilingi tiang dengan tali yang tegang ialah $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$.

4. Membuat refleksi

Wakilkan persamaan lokus P pada satah Cartes. Didapati lokus P menyentuh paksi-x pada titik $(2, 0)$.

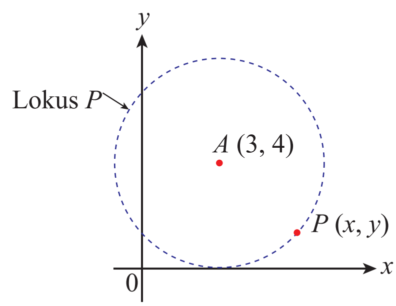
Gantikan $(2, 0)$ ke dalam persamaan lokus P.

$$
\begin{aligned}
\text{Sebelah kiri} &= 2^2 + 0^2 - 4(2) - 8(0) + 4 \\
&= 0 \\
&= \text{Sebelah kanan}
\end{aligned}
$$



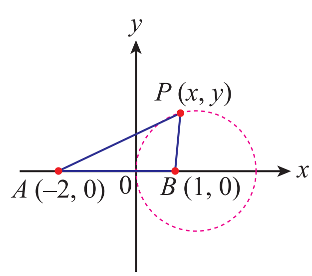
Latih Diri 7.11

1. Rajah di sebelah menunjukkan lokus bagi titik bergerak $P(x, y)$ yang menyentuh paksi-x pada satu titik dan berjarak tetap dari titik $A(3, 4)$. Cari persamaan lokus bagi P.



2. Titik P bergerak dengan keadaannya sentiasa sama jarak dari titik $Q(8, 7)$ dan titik $R(11, 4)$. Titik S pula bergerak dengan jaraknya dari titik $T(7, 8)$ adalah sentiasa 5 unit. Lokus titik P dan lokus titik S bersilang pada dua titik.
   (a) Cari persamaan lokus bagi titik P.
   (b) Tunjukkan bahawa lokus titik S ialah $x^2 + y^2 - 14x - 16y + 88 = 0$.
   (c) Cari koordinat titik-titik persilangan bagi kedua-dua lokus itu.

3. Dalam rajah di sebelah, titik $A(-2, 0)$ dan titik $B(1, 0)$ ialah dua titik tetap. Titik P bergerak di sepanjang bulatan dengan keadaan nisbah $PA : PB = 2 : 1$. Tunjukkan bahawa
   (a) persamaan bulatan ialah $x^2 + y^2 - 4x = 0$,
   (b) titik $C(2, 2)$ terletak pada bulatan itu.



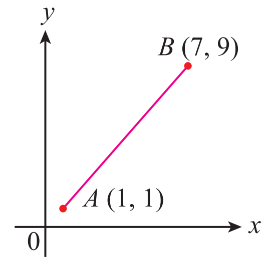
BAB 7

Latihan Intensif 7.4

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2Yc8nzD untuk Kuiz

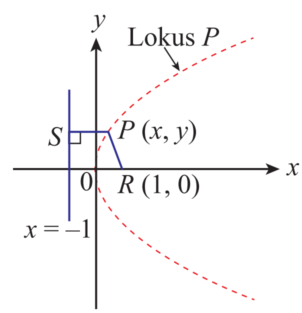
1. Satu titik $R(x, y)$ bergerak supaya jaraknya dari dua titik tetap $A(-1, 10)$ dan $B(2, 6)$ adalah dengan keadaan $\frac{RA}{RB} = \frac{1}{2}$. Cari
 (a) persamaan bagi lokus R,
 (b) koordinat titik bagi lokus R yang menyentuh paksi-y.

2. Rajah di sebelah menunjukkan suatu tembereng garis AB masing-masing dengan koordinat $A(1, 1)$ dan $B(7, 9)$. Cari persamaan lokus bagi titik bergerak S supaya segi tiga ABS sentiasa bersudut tegak di S.

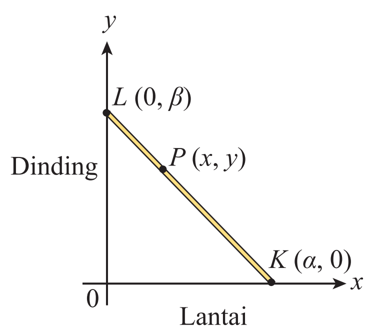


3. Titik Q bergerak di sepanjang lengkok sebuah bulatan berpusat $(6, 5)$. Lengkok bulatan itu melalui titik $R(2, 8)$ dan $S(k, 2)$. Cari
 (a) persamaan lokus bagi Q,
 (b) nilai-nilai k.

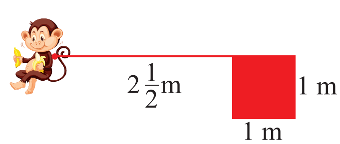
4. Rajah di sebelah menunjukkan lokus bagi titik bergerak P dengan keadaan jaraknya dari titik $R(1, 0)$ dan garis $x = -1$ adalah sama. Cari persamaan lokus bagi titik bergerak P.



5. Rajah di sebelah menunjukkan paksi-x dan paksi-y yang mewakili lantai dan dinding. Sebatang galah, LK disandarkan pada dinding dengan panjang 9 m menyentuh lantai dan dinding masing-masing pada titik $K(\alpha, 0)$ dan $L(0, \beta)$.
 (a) Tuliskan persamaan yang menghubungkan α dan β.
 (b) Diberi $P(x, y)$ ialah satu titik pada galah itu dengan keadaan nisbah $LP : PK = 1 : 2$. Kedua-dua hujung galah itu menggelongsor di sepanjang paksi-x dan paksi-y. Cari persamaan lokus bagi titik P.



6. Seekor monyet diikat dengan seutas tali pada satu bucu sangkarnya yang berukuran 1 m × 1 m. Panjang tali itu ialah $2\frac{1}{2}$ m. Lakar dan terangkan lokus jika monyet itu bergerak lawan arah jam mengelilingi sangkarnya dengan tali yang tegang.



BAB 7

RUMUSAN BAB 7

GEOMETRI KOORDINAT

Pembahagi tembereng garis

$P(x, y) = \left(\dfrac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \dfrac{ny_1 + my_2}{m + n}\right)$

Garis selari dan garis serenjang

Garis $y = m_1x + c_1$ dan $y = m_2x + c_2$ adalah selari jika dan hanya jika $m_1 = m_2$

Garis $y = m_1x + c_1$ dan $y = m_2x + c_2$ berserenjang jika hanya jika $m_1m_2 = -1$

Persamaan lokus

- Lokus titik bergerak $P(x, y)$ yang jaraknya malar dari titik tetap $A(x_1, y_1)$ ialah $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$
- Lokus titik bergerak $P(x, y)$ yang jaraknya sentiasa malar dari dua titik tetap $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dalam nisbah $m : n$ ialah
  $$\frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = \frac{m^2}{n^2}$$
- Lokus titik bergerak $P(x, y)$ yang berjarak sama dari dua titik tetap $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ ialah
  $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$

Luas poligon

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & y_1 \end{matrix}\right|$$

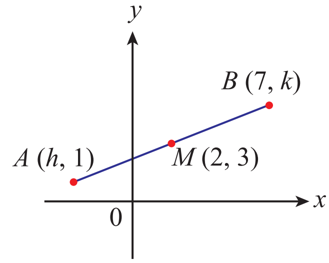
$$= \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + x_2y_3 +, \dots, + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 -, \dots, - x_1y_n\right|$$

TULIS JURNAL ANDA

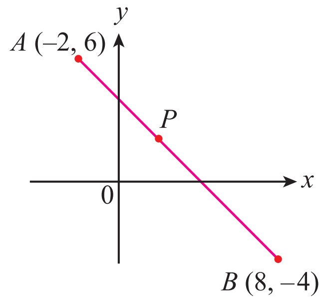
Geometri koordinat telah memperkenalkan bentuk am, bentuk kecerunan, bentuk pintasan atau bentuk yang lain dalam mengungkapkan suatu persamaan garis lurus. Apakah kelebihan dalam mengungkapkan persamaan dalam setiap bentuk itu? Bentuk persamaan yang manakah menjadi pilihan anda untuk digunakan? Mengapa?

LATIHAN PENGUKUHAN

1. Rajah di sebelah menunjukkan suatu garis lurus AB. Titik tengah yang menyambungkan $A(h, 1)$ dan $B(7, k)$ ialah $M(2, 3)$. Cari TP3
   (a) nilai h dan nilai k,
   (b) kecerunan garis lurus itu,
   (c) persamaan pembahagi dua sama serenjang AB.



2. Diberi suatu garis lurus AB dengan titik $A(–2, 6)$ dan $B(8, –4)$. Titik P terletak di atas AB dengan keadaan $AP : PB = 2 : 3$. Cari TP3
   (a) koordinat titik P,
   (b) persamaan garis lurus yang berserenjang dengan AB dan melalui titik P.

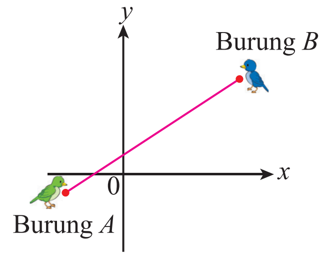


3. Diberi tiga titik $P(1, –1)$, $Q(n, 2)$ dan $R(n^2, n + 3)$. Jika titik-titik P, Q dan R terletak pada satu garis lurus yang sama, cari nilai-nilai n yang mungkin. TP3

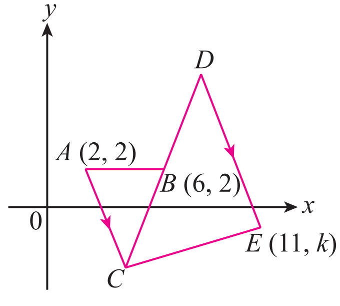
4. Diberi dua titik $R(–3, 4)$ dan $S(3, –1)$. Cari koordinat titik T yang mungkin terletak pada paksi-y dengan keadaan luas ΔRST ialah 13.5 unit^2. TP3

5. Titik $P(x, y)$ bergerak dengan keadaan jaraknya dari titik $A(2, 0)$ ialah tiga kali jaraknya dari titik $B(–4, 0)$. Cari persamaan lokus bagi titik P. TP3

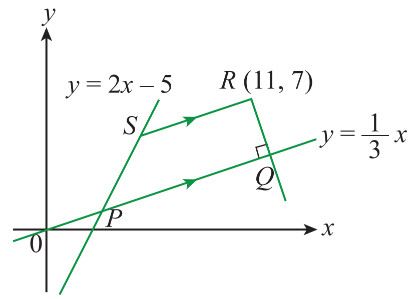
6. Rajah di sebelah menunjukkan kedudukan dua ekor burung, A dan B pada satah Cartes. Koordinat bagi burung A dan B masing-masing ialah $(–3, –1)$ dan $(6, 5)$. Kedua-dua burung itu terbang ke arah satu sama lain pada satu garis lurus dengan halaju berbeza. Halaju burung A adalah dua kali ganda halaju burung B. Cari koordinat apabila kedua-dua burung itu bertemu. TP3



7. Rajah di sebelah menunjukkan segi tiga sama kaki ABC dengan keadaan koordinat A ialah $(2, 2)$, koordinat B ialah $(6, 2)$ dan C terletak di bawah paksi-x. TP3
   (a) Diberi luas bagi ΔABC ialah 10 unit^2, cari koordinat C.
   (b) Garis CB dipanjangkan ke titik D supaya B ialah titik tengah CD. Cari koordinat D.
   (c) Satu garis dilukis dari titik D, selari dengan AC, ke titik $E(11, k)$ dan C disambungkan ke E.
      (i) Cari nilai k.
      (ii) Tunjukkan bahawa CED bukan segi tiga bersudut tegak.



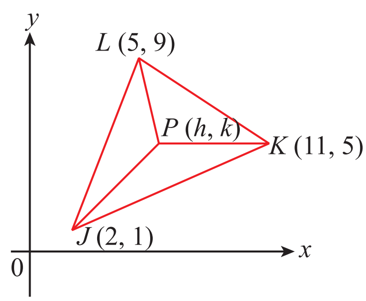
8. Dalam rajah di sebelah, *PQRS* ialah sebuah trapezium dengan *PQ* selari dengan *SR* dan $\angle PQR = 90°$. Koordinat bagi bucu *R* ialah (11, 7). Persamaan *PQ* dan *PS* masing-masing ialah $y = \frac{1}{3}x$ dan $y = 2x - 5$. Cari TP4



(a) koordinat *P*,
(b) persamaan *QR* dan *SR*,
(c) koordinat *Q* dan *S*,
(d) luas trapezium *PQRS*.

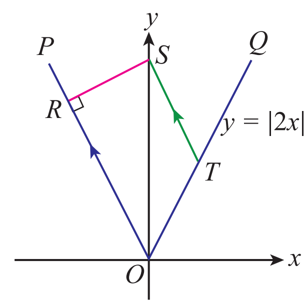
Seterusnya tunjukkan bahawa $\dfrac{\text{luas } \Delta PQR}{\text{luas } \Delta PRS} = \dfrac{PQ}{SR}$.

9. Koordinat bagi bucu-bucu sebuah ΔJKL ialah $J(2, 1)$, $K(11, 5)$ dan $L(5, 9)$. Titik $P(h, k)$ berada dalam segi tiga itu dengan keadaan semua luas bagi ΔJKP, ΔKLP dan ΔJLP adalah sama. TP5



(a) Cari luas ΔJKL.
(b) Ungkapkan luas ΔJKP dan ΔKLP dalam sebutan *h* dan *k*.
(c) Cari koordinat *P*.
(d) Cari persamaan garis *JP*.
(e) Jika *JP* dipanjangkan bertemu *KL* di *Q*, cari
  (i) koordinat *Q*,
  (ii) nisbah *KQ* : *QL*.

10. Dalam rajah di sebelah, *POQ* ialah graf bagi $y = |2x|$. *R* ialah titik pada *OP* dengan keadaan $OR = \sqrt{45}$ unit dan *O* ialah asalan. *RS* berserenjang dengan *OP* dan *OR* selari dengan *TS*. Cari TP5

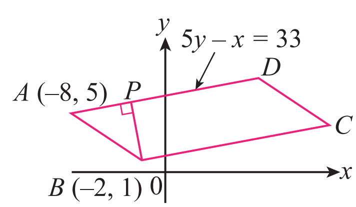


(a) koordinat *R*, *S* dan *T*,
(b) luas trapezium *ORST*.

11. $P(h, 8)$ dan $Q(k, 2)$ ialah dua titik pada lengkung $y = \dfrac{8}{x}$. TP5

(a) Cari nilai *h* dan nilai *k*.
(b) Cari persamaan *PQ*.
(c) Dengan menggunakan kaedah koordinat geometri, cari persamaan-persamaan tangen kepada lengkung yang selari dengan *PQ*.

12. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi empat selari *ABCD* dengan koordinat *A* dan *B* masing-masing ialah (–8, 5) dan (–2, 1). Persamaan *AD* ialah $5y - x = 33$. *P* ialah titik pada garis serenjang dari *B* ke *AD* dan *AP* : *PD* = 1 : 2. Cari TP4

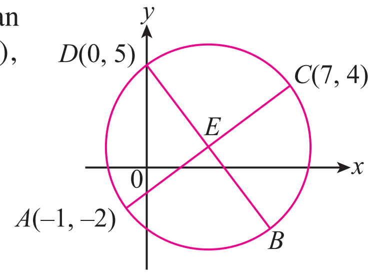


(a) persamaan *BP*,
(b) koordinat *P*, *D* dan *C*,
(c) luas bagi segi empat selari *ABCD*.

13. Dalam rajah di sebelah, AC dan BD ialah diameter suatu bulatan berpusat E. Titik-titik A, C dan D masing-masing ialah $(-1, -2)$, $(7, 4)$ dan $(0, 5)$. TP5

(a) Cari koordinat E dan B.

(b) Apakah jenis sisi empat $ABCD$?



14. Setiap awal bulan, sebuah syarikat penerbitan majalah menjual x naskhah majalah dengan harga RM6.00 senaskhah. Kos bagi senaskhah majalah ialah RM2.00 dan pada setiap awal bulan syarikat itu membayar kos tetap sebanyak RM400 untuk pencetakan, penyimpanan dan penghantaran. TP5

(a) Tuliskan persamaan yang menghubungkan keuntungan P, dalam RM, dengan bilangan naskhah majalah, x, yang terjual.

(b) Lukis graf bagi persamaan yang diperoleh. Daripada graf yang dilukis,
  (i) cari keuntungan yang diperoleh jika 500 naskhah majalah terjual,
  (ii) hitung bilangan naskhah majalah yang terjual jika keuntungan yang diperoleh ialah RM1 000.

15. Bucu-bucu bagi sebuah segi tiga ABC ialah $A(1, 2)$, $B(6, 7)$ dan $C(7, 2)$. Lukis segi tiga ABC dan bina pembahagi dua sama serenjang AB, BC dan CA. Tandakan titik persilangan sebagai P. Apakah yang dapat anda katakan tentang titik persilangan itu? Lukis bulatan berpusat P dan berjejari AP. Apakah yang dapat anda nyatakan tentang bulatan tersebut? Lakukan langkah yang sama bagi segi tiga yang lain untuk mengesahkan jawapan anda. TP6

Penerokaan MATEMATIK

1. Persamaan $y = mx$ dengan keadaan m ialah kecerunannya, mentakrifkan kumpulan garis, iaitu satu garis untuk setiap nilai m.

(a) Dengan menggunakan perisian geometri dinamik, lukiskan graf bagi kumpulan garis apabila kecerunannya sifar, $m = 0$ diikuti kecerunan positif, iaitu $m = \frac{1}{2}$, $m = 1$, $m = 2$ dan $m = 6$, seterusnya kecerunan negatif, iaitu $m = -\frac{1}{2}$, $m = -1$, $m = -2$ dan $m = -6$.

(b) Daripada graf yang diperoleh, apakah yang berlaku pada magnitud bagi setiap kecerunan garis itu apabila graf semakin hampir dengan garis mencancang? Bolehkah anda membuat kesimpulan tentang setiap ahli kumpulan garis itu?

2. Persamaan $y = 2x + c$ pula mentakrifkan kumpulan garis, iaitu satu garis untuk setiap nilai c.

(a) Dengan menggunakan perisian geometri dinamik, lukis graf bagi kumpulan garis apabila $c = -6$, $c = -3$, $c = 0$ dan $c = 6$.

(b) Daripada graf yang dilukis, apakah yang dapat anda simpulkan tentang setiap ahli bagi kumpulan garis itu?

BAB 7

BAB 8 Vektor

Apakah yang akan dipelajari?

- Vektor
- Penambahan dan Penolakan Vektor
- Vektor dalam Satah Cartes

Senarai Standard Pembelajaran

bit.ly/2RdsXvY

KATA KUNCI

Vektor	*Vector*
Magnitud	*Magnitude*
Arah	*Direction*
Tembereng garis berarah	*Directed line segment*
Vektor sifar	*Zero vector*
Vektor negatif	*Negative vector*
Segaris	*Collinear*
Vektor paduan	*Resultant vector*
Vektor kedudukan	*Position vector*
Hukum segi tiga	*Triangle law*
Hukum segi empat selari	*Parallelogram law*
Hukum poligon	*Polygon law*

Sistem penerbangan Malaysia menghubungkan orang ramai ke pelbagai destinasi di seluruh dunia. Syarikat ini telah memperluaskan laluan penerbangannya dengan menyediakan penerbangan ke lebih daripada 1 000 destinasi, melibatkan kira-kira 150 buah negara. Pada pendapat anda, apakah maklumat yang diperlukan oleh seorang juruterbang untuk menentukan laluan yang sesuai digunakan ke destinasi yang ingin dituju?

Tahukah Anda?

Sebagai suatu kuantiti yang melibatkan magnitud dan arah, vektor digunakan secara meluas dalam bidang matematik dan fizik. Selain itu, vektor juga banyak diaplikasikan dalam kehidupan seharian seperti dalam bidang navigasi, sains komputer, geometri dan topologi.

Untuk maklumat lanjut:

bit.ly/2LbbIZr

SIGNIFIKAN BAB INI

Pengetahuan tentang vektor penting kerana penggunaannya dalam bidang fizik dan matematik. Dalam cabang mekanik, vektor digunakan untuk mewakili suatu kuantiti seperti sesaran, daya, berat, halaju, dan momentum. Penggunaannya juga meluas dalam ilmu pelayaran dan penerbangan.

Imbas kod *QR* ini untuk menonton video mengenai Malaysia Airlines.

bit.ly/2LazgOc

8.1 Vektor

Membanding beza dan mengenal pasti vektor dan skalar

Dalam kehidupan seharian, terdapat pelbagai kuantiti yang mempunyai magnitud dan arah serta kuantiti yang mempunyai magnitud sahaja tanpa mempunyai arah. Kuantiti yang mempunyai magnitud dan arah dikenali sebagai **kuantiti vektor** manakala kuantiti yang hanya mempunyai magnitud sahaja tanpa mempunyai arah dikenali sebagai **kuantiti skalar**.

Teliti dua situasi yang berikut.

Suhu suatu cecair yang diletakkan di dalam peti sejuk ialah –12°C.

Sebuah kereta bergerak di jalan raya ke arah selatan dengan laju 80 km j^{-1}.

Dapatkah anda tentukan situasi manakah yang melibatkan kuantiti vektor dan kuantiti skalar? Bagaimanakah anda dapat mengenal pasti sama ada suatu kuantiti itu ialah kuantiti vektor atau kuantiti skalar?

Jadual berikut menunjukkan contoh kuantiti yang melibatkan vektor dan skalar serta kuantiti yang tidak melibatkan kedua-dua vektor dan skalar.

Vektor	Skalar	Tidak melibatkan vektor dan skalar
50 N daya yang dikenakan ke atas sebuah kotak.	Tinggi Auni ialah 1.48 m.	Tekanan dan ketegangan.
Halaju sebuah kereta ialah 90 km j^{-1} ke arah timur.	Luas sekeping jubin ialah 120 cm^2.	Kekonduksian logam.

QR

Maklumat tambahan tentang vektor dan skalar.

bit.ly/2VmZZMk

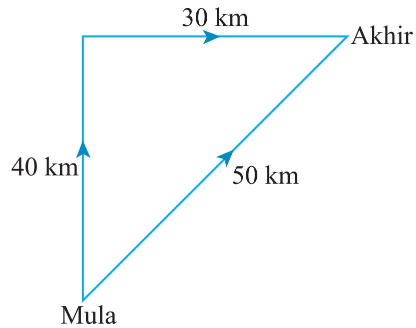
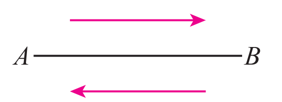
Cabar Minda

Senaraikan beberapa situasi yang melibatkan vektor dan skalar serta beberapa situasi yang tidak melibatkan vektor atau skalar.

SUMBANG SARAN

Kuantiti skalar ialah tensor pada tahap sifar manakala kuantiti vektor ialah tensor pada tahap satu. Layari Internet untuk mengetahui maklumat tentang tensor dan bincangkan dapatan anda.

Dapatkah anda membezakan antara jarak dengan sesaran, laju dengan halaju serta jisim dengan berat? Berikut menunjukkan perbezaan antara kuantiti-kuantiti tersebut.

Kuantiti skalar	Kuantiti vektor	Contoh
Jarak Jumlah panjang lintasan yang dilalui oleh objek dalam suatu gerakan.	**Sesaran** Panjang tembereng garis lurus paling pendek antara titik awal dengan titik terminal dan melibatkan arah dari satu titik rujukan.	 Sebuah kereta bergerak 40 km ke utara dan 30 km ke timur. Jarak = 40 km + 30 km = 70 km Sesaran = 50 km
Laju Kadar perubahan jarak terhadap masa.	**Halaju** Kadar perubahan sesaran terhadap masa. Nilainya negatif jika objek bergerak dalam arah bertentangan.	 Haziq bergerak dari *A* ke *B* dengan laju dan halaju yang sama, iaitu 90 km j^{-1}. Kemudian, dia berpatah balik dari *B* ke *A* dengan laju 90 km j^{-1} dan halaju –90 km j^{-1}.
Jisim Kuantiti jirim yang terkandung dalam suatu objek. Nilainya tidak berubah mengikut lokasi.	**Berat** Daya tarikan graviti bumi ke atas suatu objek. Nilainya tidak tetap dan bergantung kepada daya tarikan graviti suatu lokasi.	Jisim seorang angkasawan semasa berada di bulan ialah 120 kg dengan berat 200 N manakala jisim angkasawan tersebut semasa berada di bumi ialah 120 kg dengan berat 1 200 N.

BAB 8

8.1.1

Contoh 1

Nyatakan sama ada setiap kuantiti berikut ialah kuantiti vektor atau kuantiti skalar. Berikan justifikasi anda.

(a) Mikail berjalan kaki dari rumah ke kedai runcit sejauh 1 km.
(b) Sebuah kereta dipandu dengan kelajuan 90 km j^{-1} ke arah selatan.
(c) Suhu badan Alicia mencecah 38°C.

Penyelesaian

(a) Kuantiti skalar kerana kuantiti itu mempunyai magnitud sahaja.
(b) Kuantiti vektor kerana kuantiti itu mempunyai magnitud dan arah.
(c) Kuantiti skalar kerana kuantiti itu mempunyai magnitud sahaja.

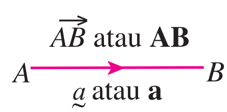
Latih Diri 8.1

1. Tentukan sama ada kuantiti berikut adalah kuantiti skalar atau kuantiti vektor. Berikan justifikasi anda.
(a) Cecair X mempunyai ketumpatan 1.2 g cm^{-3}.
(b) Sebuah kotak seberat 150 N diangkat setinggi 1 m dari lantai.
(c) Isi padu bagi sebotol air mineral ialah 1.5 l.
(d) Tempoh percutian Suzie ialah 3 hari 2 malam.
(e) Sebiji bola diberi satu impuls sebanyak 5.0 Ns secara mendatar.

Mewakilkan vektor menggunakan tembereng garis berarah dan tatatanda vektor serta menentukan magnitud dan arah vektor

Vektor boleh diwakili oleh satu tembereng garis yang mempunyai anak panah atau lebih dikenali sebagai tembereng garis berarah. Anak panah mewakili arah vektor dan panjang garis mewakili magnitud vektor.

Sebagai contoh, vektor bagi sebuah kapal layar yang sedang bergerak 7 km ke arah timur dari titik A ke titik B boleh diwakilkan dengan tembereng garis berarah seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Titik A ialah titik awal manakala titik B ialah titik terminal.



Vektor boleh diwakilkan dengan tatatanda seperti berikut:

$\overrightarrow{AB}$ atau **AB** atau $\underset{\sim}{a}$ atau **a**

Magnitud bagi vektor pula boleh ditulis sebagai:

$|\overrightarrow{AB}|$ atau |**AB**| atau $|\underset{\sim}{a}|$ atau |**a**|

Vektor sifar ialah vektor yang mempunyai magnitud sifar dan arahnya tidak dapat ditentukan. Vektor sifar diwakili oleh $\underset{\sim}{0}$.

Contoh:

Sebuah kereta lumba bergerak dalam litar yang berbentuk bulatan. Titik awal dan titik terminal bagi pergerakan kereta lumba itu sama. Maka, vektor bagi sesaran kereta lumba tersebut ialah vektor sifar.

Dua vektor adalah sama jika kedua-dua vektor mempunyai magnitud dan arah yang sama, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Contoh:

Rakesh dan Fauzi sedang mengayuh basikal dengan laju yang sama dan ke arah yang sama. Vektor halaju, v, bagi kedua-dua pergerakan mereka adalah sama. Maka, $v_{\text{Rakesh}} = v_{\text{Fauzi}}$.

Suatu vektor adalah negatif jika vektor itu mempunyai magnitud yang sama tetapi arah yang bertentangan. Vektor $\overrightarrow{BA}$ ialah vektor negatif bagi vektor $\overrightarrow{AB}$ dan ditulis sebagai $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Contoh:

Dua buah kereta api, A dan B, berselisih di dua landasan yang selari dengan halaju yang sama tetapi arah yang berlawanan. Halaju kereta api A bernilai positif manakala halaju kereta api B bernilai negatif.

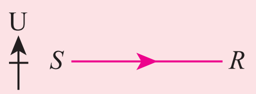
Contoh 2

Lukis dan label setiap vektor yang berikut.

(a) $\overrightarrow{SR}$ mewakili sesaran 12 km ke timur.
(b) $\underset{\sim}{p}$ mewakili daya 7 N ke selatan.
(c) $\tilde{\mathbf{r}}$ mewakili halaju 70 m s^{-1} ke kiri.

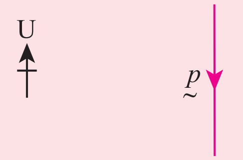
Penyelesaian

(a)



1 cm mewakili 6 km

(b)



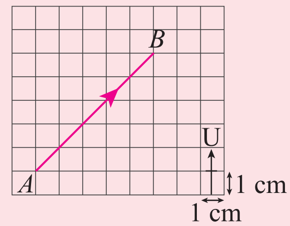
1 cm mewakili 3.5 N

(c)

1 cm mewakili 20 m s^{-1}

Contoh 3

Rajah di sebelah menunjukkan vektor $\overrightarrow{AB}$ yang mewakili sesaran suatu zarah dari titik A ke titik B. Cari magnitud dan arah pergerakan zarah itu dari titik A.



Penyelesaian

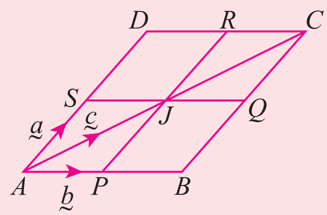
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{50}$$
$$= 5\sqrt{2}$$

Maka, magnitud $\overrightarrow{AB}$ ialah $5\sqrt{2}$ cm dan arah $\overrightarrow{AB}$ adalah ke timur laut.

Contoh 4

Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi empat selari, $ABCD$. Titik-titik P, Q, R dan S masing-masing ialah titik tengah bagi AB, BC, CD dan DA. Diberi bahawa $\overrightarrow{AS} = \underset{\sim}{a}$, $\overrightarrow{AP} = \underset{\sim}{b}$ dan $\overrightarrow{AJ} = \underset{\sim}{c}$. Nyatakan setiap vektor berikut dalam sebutan $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ atau $\underset{\sim}{c}$.

(a) $\overrightarrow{SD}$ (b) $\overrightarrow{CJ}$ (c) $\overrightarrow{RJ}$ (d) $\overrightarrow{JQ}$



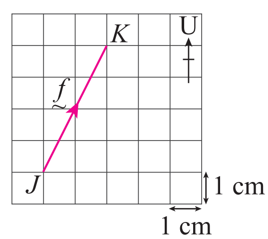
Penyelesaian

(a) $\overrightarrow{SD} = \underset{\sim}{a}$ (b) $\overrightarrow{CJ} = -\underset{\sim}{c}$ (c) $\overrightarrow{RJ} = -\underset{\sim}{a}$ (d) $\overrightarrow{JQ} = \underset{\sim}{b}$

Latih Diri 8.2

1. Dengan menggunakan skala yang sesuai, lukis dan labelkan setiap vektor berikut.
(a) $\overrightarrow{XY}$ mewakili daya 5 N ke kanan.
(b) **RS** mewakili sesaran 40 km ke barat daya.
(c) $\underset{\sim}{v}$ mewakili halaju 20 km j^{-1} ke barat.
(d) **a** mewakili momentum 7 kg m s^{-1} ke kiri.

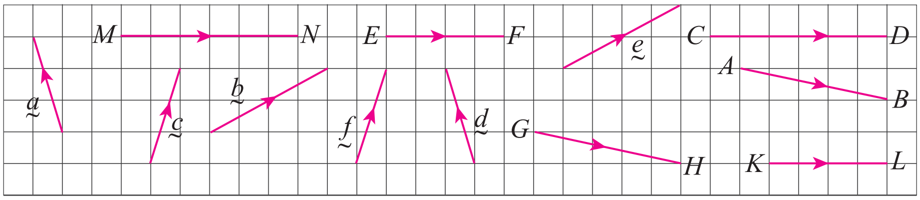
2. Rajah di sebelah menunjukkan vektor $\underset{\sim}{f}$ yang mewakili daya ke atas suatu objek dari J ke K. Cari magnitud dan arah bagi vektor $\underset{\sim}{f}$.



3. Dua buah kereta, A dan B bergerak dari bandar O. Kereta A bergerak ke utara manakala kereta B bergerak ke timur. Cari jarak di antara kedua-dua buah kereta itu selepas satu jam perjalanan, jika diberi $|\overrightarrow{OA}| = 90$ km dan $|\overrightarrow{OB}| = 75$ km.

BAB 8

4. Cari pasangan vektor yang sama dalam rajah di bawah.



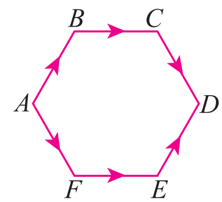
5. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah heksagon sekata *ABCDEF*.

(a) Nyatakan vektor yang sama dengan

(i) $\overrightarrow{AB}$ (ii) $\overrightarrow{BC}$ (iii) $\overrightarrow{CD}$

(b) Nyatakan vektor negatif bagi

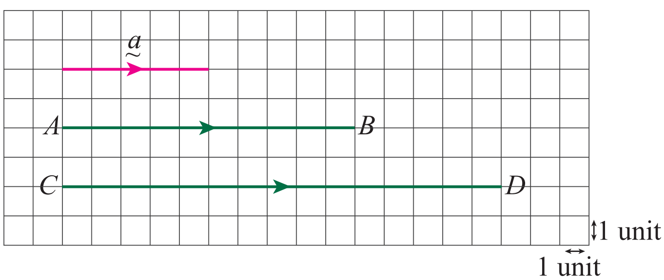
(i) $\overrightarrow{AF}$ (ii) $\overrightarrow{FE}$ (iii) $\overrightarrow{ED}$



Membuat dan mengesahkan konjektur tentang sifat-sifat pendaraban vektor dengan skalar

Perhatikan dua kes berikut:

Kes 1



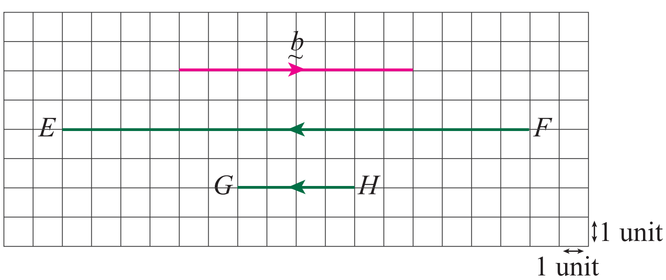
Perhatikan vektor $\underset{\sim}{a}$, $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{CD}$ dalam rajah di sebelah.

Didapati $\overrightarrow{AB} = 2 \times \underset{\sim}{a}$ atau $2\underset{\sim}{a}$, dan

$\overrightarrow{CD} = 3 \times \underset{\sim}{a}$ atau $3\underset{\sim}{a}$

Diberi $|\underset{\sim}{a}| = 5$ unit, maka $|\overrightarrow{AB}| = 10$ unit dan $|\overrightarrow{CD}| = 15$ unit.

Kes 2



Perhatikan vektor $\underset{\sim}{b}$, $\overrightarrow{EF}$ dan $\overrightarrow{GH}$ dalam rajah di sebelah.

Didapati $\overrightarrow{EF} = 2 \times (-\underset{\sim}{b})$ atau $(-2)\underset{\sim}{b}$, dan

$$\overrightarrow{GH} = \frac{1}{2} \times (-\underset{\sim}{b}) \text{ atau } \left(-\frac{1}{2}\right)\underset{\sim}{b}$$

Diberi $|\underset{\sim}{b}| = 8$ unit, maka $|\overrightarrow{EF}| = 16$ unit dan $|\overrightarrow{GH}| = 4$ unit.

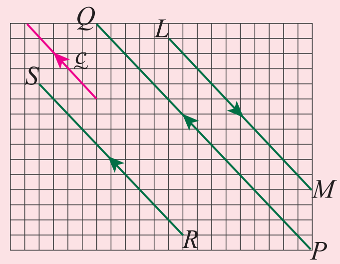
8.1.2 8.1.3

Daripada Kes 1 dan Kes 2, dapat disimpulkan bahawa:

Pendaraban skalar k dengan vektor $\underset{\sim}{a}$ menghasilkan vektor $k\underset{\sim}{a}$, dengan keadaan:
(a) $|k\underset{\sim}{a}| = k|\underset{\sim}{a}|$.
(b) Arah $k\underset{\sim}{a}$ sama dengan arah $\underset{\sim}{a}$ jika $k > 0$.
(c) Arah $k\underset{\sim}{a}$ bertentangan dengan arah $\underset{\sim}{a}$ jika $k < 0$.

Contoh 5

Nyatakan setiap vektor pada rajah di sebelah dalam sebutan $\underset{\sim}{c}$.

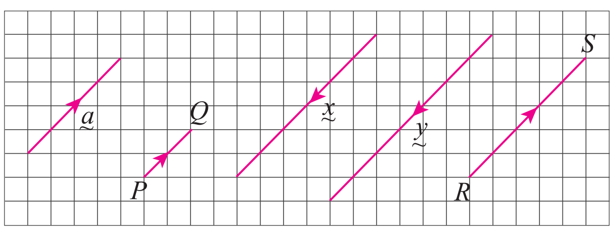


Penyelesaian

$\overrightarrow{RS} = 2\underset{\sim}{c}$, $\overrightarrow{PQ} = 3\underset{\sim}{c}$, $\overrightarrow{LM} = -2\underset{\sim}{c}$

Latih Diri 8.3

1. Nyatakan setiap vektor berikut dalam sebutan $\underset{\sim}{a}$.



TIP PINTAR

Pendaraban vektor dengan skalar juga akan menghasilkan kuantiti vektor. Sebagai contoh, $F = ma$.

Daya (vektor)
= jisim (skalar) × pecutan (vektor)

Membuat dan mengesahkan konjektur tentang vektor selari

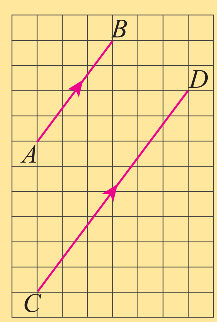
INKUIRI 1 Berkumpulan

Tujuan: Membuat dan mengesahkan konjektur tentang hubungan antara dua vektor selari

Arahan:

1. Pertimbangkan rajah di sebelah dan jawab soalan yang berikut:
(a) Cari magnitud bagi setiap vektor.
(b) Tentukan nisbah bagi $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{CD}|$.
(c) Tentukan kecerunan bagi garis lurus AB dan CD. Adakah garis lurus AB dan CD selari?
(d) Ungkapkan $\overrightarrow{AB}$ dalam sebutan $\overrightarrow{CD}$.

2. Jika diberi dua vektor, $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$ yang selari, apakah hubungan antara $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$? Bincang bersama dengan rakan sekumpulan anda.



BAB 8

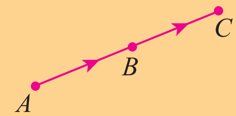
Hasil daripada Inkuiri 1, dapat disimpulkan bahawa jika dua vektor adalah selari, maka satu vektor ialah hasil darab skalar dengan vektor yang satu lagi.

> $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$ adalah selari jika dan hanya jika $\underset{\sim}{a} = k\underset{\sim}{b}$, dengan keadaan k ialah pemalar.

Jika $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$ ialah dua vektor bukan sifar dan tidak selari, dengan keadaan $h\underset{\sim}{a} = k\underset{\sim}{b}$, maka $h = k = 0$.

POKET MATEMATIK

Diberi tiga titik, A, B dan C. Berikut merupakan syarat untuk titik-titik itu segaris.
(a) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$.
(b) AB selari dengan BC.
(c) B ialah titik sepunya.



Contoh 6

Diberi $\overrightarrow{PQ} = \underset{\sim}{a}$, $\overrightarrow{QR} = \underset{\sim}{b}$, $\overrightarrow{RS} = -2\underset{\sim}{a}$ dan $\overrightarrow{ST} = 4\underset{\sim}{b}$. Pasangan vektor manakah yang selari?

Penyelesaian

Diberi $\overrightarrow{PQ} = \underset{\sim}{a}$ dan $\overrightarrow{RS} = -2\underset{\sim}{a}$, maka $\overrightarrow{RS} = -2\overrightarrow{PQ}$. Oleh itu, $\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{RS}$ adalah selari.
Diberi $\overrightarrow{QR} = \underset{\sim}{b}$ dan $\overrightarrow{ST} = 4\underset{\sim}{b}$, maka $\overrightarrow{ST} = 4\overrightarrow{QR}$. Oleh itu, $\overrightarrow{QR}$ dan $\overrightarrow{ST}$ adalah selari.

Contoh 7

Diberi $\overrightarrow{PQ} = \underset{\sim}{u}$ dan $\overrightarrow{QR} = 5\underset{\sim}{u}$, tunjukkan bahawa P, Q dan R adalah segaris.

Penyelesaian

Diberi $\overrightarrow{PQ} = \underset{\sim}{u}$ dan $\overrightarrow{QR} = 5\underset{\sim}{u}$, maka, $\overrightarrow{QR} = 5\overrightarrow{PQ}$.
Oleh itu, $\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{QR}$ adalah selari.
Oleh sebab Q ialah titik sepunya, maka P, Q dan R adalah segaris.

Cabar Minda

Diberi titik-titik X, Y dan Z adalah segaris. Tuliskan hubungan antara $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{XZ}$ dan $\overrightarrow{YZ}$.

Contoh 8

Diberi vektor-vektor bukan sifar, $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$ adalah tidak selari dan $(h - 1)\underset{\sim}{a} = (k + 5)\underset{\sim}{b}$, dengan keadaan h dan k ialah pemalar, cari nilai h dan nilai k.

Penyelesaian

Diberi $(h - 1)\underset{\sim}{a} = (k + 5)\underset{\sim}{b}$. Oleh sebab $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$ tidak selari dan bukan sifar, maka
$h - 1 = 0$ dan $k + 5 = 0$
$h = 1$ $\qquad$ $k = -5$

8.1.4

BAB 8

Latih Diri 8.4

1. Diberi $\overrightarrow{AB} = 5\underset{\sim}{a}$ dan $\overrightarrow{PQ} = 20\underset{\sim}{a}$, ungkapkan $\overrightarrow{AB}$ dalam sebutan $\overrightarrow{PQ}$ jika $\overrightarrow{AB}$ selari dengan $\overrightarrow{PQ}$.

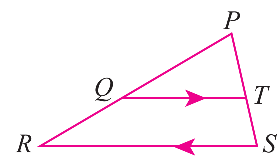
2. Tunjukkan bahawa titik-titik L, M dan N adalah segaris, diberi $\overrightarrow{LM} = 6\underset{\sim}{x}$ dan $\overrightarrow{MN} = 18\underset{\sim}{x}$.

3. Diberi vektor bukan sifar, $\underset{\sim}{u}$ dan $\underset{\sim}{v}$ adalah tidak selari, cari nilai m dan nilai n bagi setiap yang berikut.
   (a) $(4m + 3)\underset{\sim}{u} = (n - 7)\underset{\sim}{v}$
   (b) $(m + n - 1)\underset{\sim}{u} - (m - 2n - 10)\underset{\sim}{v} = 0$

4. Diberi $\overrightarrow{XY}$ dan $\overrightarrow{VW}$ ialah vektor selari, $|\overrightarrow{XY}| = 6$ unit dan $|\overrightarrow{VW}| = 21$ unit, ungkapkan $\overrightarrow{VW}$ dalam sebutan $\overrightarrow{XY}$.

5. Titik-titik P, Q dan R adalah segaris dengan $\overrightarrow{PQ} = \underset{\sim}{a}$ dan $\overrightarrow{QR} = (k - 2)\underset{\sim}{a}$. Cari nilai k jika $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$, dengan keadaan k ialah pemalar.

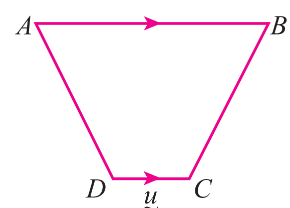
6. Dalam segi tiga PRS di sebelah, $\overrightarrow{QT}$ dan $\overrightarrow{RS}$ ialah dua vektor yang selari. Diberi $PT : TS = 5 : 3$, ungkapkan $\overrightarrow{SR}$ dalam sebutan $\overrightarrow{QT}$.



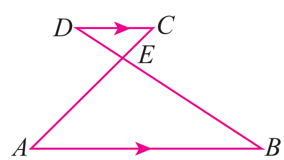
Latihan Intensif 8.1

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2FQF5Mv untuk kuiz

1. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah trapezium $ABCD$. Diberi $\overrightarrow{DC} = \underset{\sim}{u}$, $AB = 6$ cm dan $DC = 2$ cm, tuliskan $\overrightarrow{AB}$ dalam sebutan $\underset{\sim}{u}$.



2. Dalam rajah di sebelah, AB dan DC adalah selari. Diberi $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ dan $|\overrightarrow{DC}| = 4$ cm.
   (a) Cari $|\overrightarrow{AB}|$.
   (b) Jika $\overrightarrow{AE} = 6\underset{\sim}{a}$ dan $\overrightarrow{ED} = 2\underset{\sim}{b}$, ungkapkan
      (i) $\overrightarrow{EC}$ dalam sebutan $\underset{\sim}{a}$,
      (ii) $\overrightarrow{BE}$ dalam sebutan $\underset{\sim}{b}$.



3. Diberi bahawa $\overrightarrow{AB} = 4\underset{\sim}{x}$ dan $\overrightarrow{AC} = 6\underset{\sim}{x}$, tunjukkan bahawa A, B dan C adalah segaris.

4. Vektor $\underset{\sim}{a}$ dan vektor $\underset{\sim}{b}$ adalah bukan sifar dan tidak selari. Diberi bahawa $(h + k)\underset{\sim}{a} = (h - k + 1)\underset{\sim}{b}$ dengan h dan k ialah pemalar. Cari nilai h dan nilai k.

5. Diberi $\overrightarrow{PQ} = (k + 2)\,\underset{\sim}{x} + 4\underset{\sim}{y}$. Jika PQ dipanjangkan kepada titik R dengan keadaan $\overrightarrow{QR} = h\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y}$, ungkapkan k dalam sebutan h.

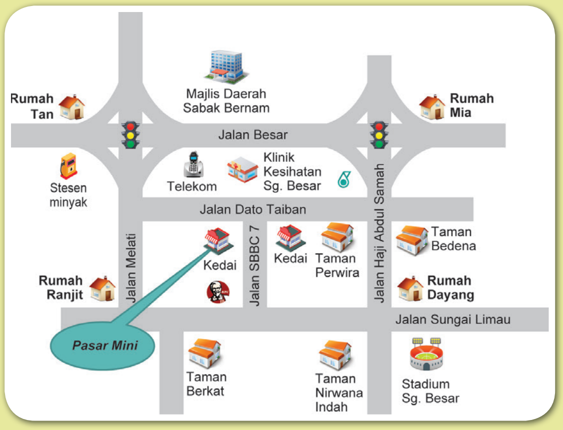
BAB 8

8.2 Penambahan dan Penolakan Vektor

Membuat penambahan dan penolakan vektor bagi menghasilkan vektor paduan

INKUIRI 2 Berpasangan PAK-21

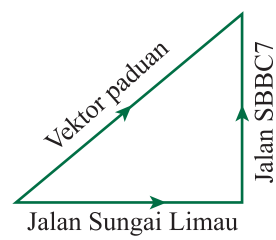
Tujuan: Mengenal vektor paduan
Arahan:
1. Perhatikan peta di sebelah.
2. Dayang, Mia, Tan dan Ranjit bercadang ingin bertemu di pasar mini.
3. Lakarkan laluan yang boleh diambil oleh mereka dengan mengambil kira titik awal dan titik terminal serta arah yang diikuti.
4. Apakah yang dapat anda katakan tentang laluan yang dilalui oleh mereka?



Hasil daripada Inkuiri 2, didapati bahawa lakaran bagi laluan yang dilalui oleh mereka menghasilkan sesaran yang merupakan suatu vektor paduan. Vektor paduan ialah vektor tunggal yang terhasil daripada penambahan beberapa vektor.

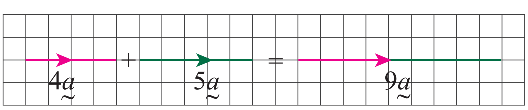
Berikut merupakan beberapa kes yang melibatkan vektor paduan.

Lakaran laluan Ranjit



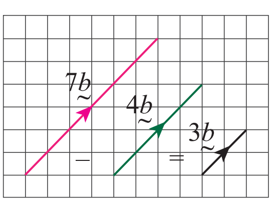
Kes 1 Penambahan dan penolakan vektor selari

A Penambahan dua vektor selari



$4\underset{\sim}{a} + 5\underset{\sim}{a} = 9\underset{\sim}{a}$
$|9\underset{\sim}{a}| = |4\underset{\sim}{a}| + |5\underset{\sim}{a}|$

B Penolakan dua vektor selari



$7\underset{\sim}{b} - 4\underset{\sim}{b} = 7\underset{\sim}{b} + (-4\underset{\sim}{b}) = 3\underset{\sim}{b}$
$|3\underset{\sim}{b}| = |7\underset{\sim}{b}| - |4\underset{\sim}{b}|$

Jika vektor $\underset{\sim}{a}$ selari dengan vektor $\underset{\sim}{b}$, maka $\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a} + (-\underset{\sim}{b})$.

8.2.1

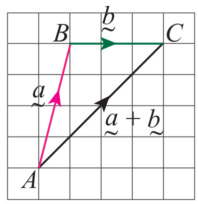
Kes 2 Penambahan dan penolakan vektor tak selari

SUMBANG SARAN

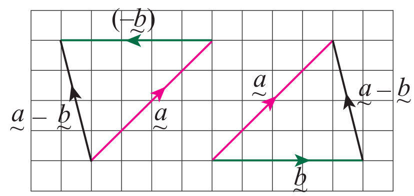
Adakah penambahan vektor mematuhi hukum kalis tukar tertib? Bincangkan.

A Hukum segi tiga

Hukum segi tiga bagi penambahan dua vektor tidak selari diberi oleh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

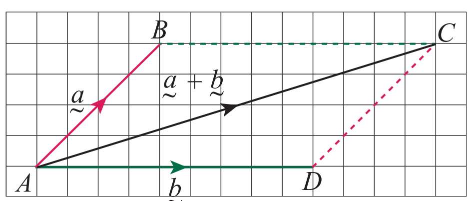


Hukum segi tiga ini boleh digunakan pada penolakan dua vektor tidak selari.



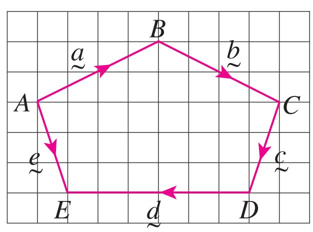
B Hukum segi empat selari

Dua vektor, $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$ yang bermula dari satu titik yang sama boleh diwakili oleh dua sisi bersebelahan sebuah segi empat selari, $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AD}$. Maka, vektor paduan $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$ ialah pepenjuru segi empat selari, $\overrightarrow{AC}$.



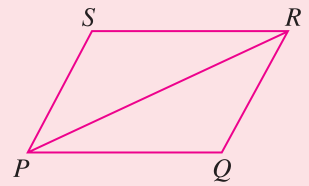
C Hukum Poligon

Hukum poligon diberi oleh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.



Contoh 9

Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi empat selari *PQRS*.



(a) Ungkapkan
  (i) $\overrightarrow{PQ}$ dalam sebutan $\overrightarrow{PS}$ dan $\overrightarrow{SQ}$,
  (ii) $\overrightarrow{PR}$ dalam sebutan $\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{PS}$,
  (iii) $\overrightarrow{QR}$ dalam sebutan $\overrightarrow{PR}$ dan $\overrightarrow{PQ}$.

(b) Diberi $\overrightarrow{PQ} = 2\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$ dan $\overrightarrow{PS} = 2\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}$, ungkapkan $\overrightarrow{PR}$ dalam sebutan $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$.

Penyelesaian

(a) (i) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SQ}$ ← Hukum segi tiga

(ii) $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PQ}$ ← Hukum segi empat selari

(iii) $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$ ← Hukum segi tiga

$= -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$

$= \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$

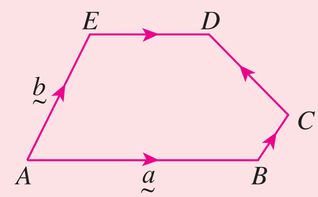
(b) $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PQ}$

$= 2\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a} + 2\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$

$= \underset{\sim}{a} + 3\underset{\sim}{b}$

Contoh 10

Rajah di sebelah menunjukkan sebuah pentagon *ABCDE*. Diberi $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} = \underset{\sim}{a}$ dan $\overrightarrow{AE} = \underset{\sim}{b}$, ungkapkan $\overrightarrow{CD}$ dalam sebutan $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$.



Penyelesaian

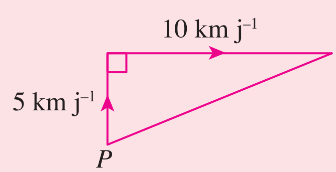
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$

$= -\frac{1}{3}\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{a}$

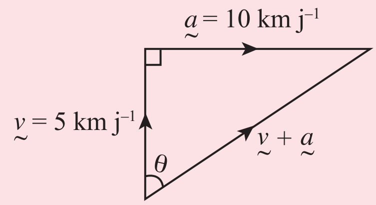
$= \frac{2}{3}\underset{\sim}{b} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{a}$

Contoh 11

Hamzah mendayung perahunya dari titik *P* ke seberang sungai dengan halaju, $\underset{\sim}{v}$, 5 km j^{-1} ke arah utara. Arus sungai itu mengalir dengan halaju, $\underset{\sim}{a}$, 10 km j^{-1} ke arah timur. Rajah di sebelah menunjukkan lakaran pergerakan perahu dan arus sungai. Hitung arah dan halaju baharu perahu itu kesan daripada aliran arus tersebut.



Penyelesaian



Halaju perahu sebenar ialah $\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{a}$.

$|\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{a}| = \sqrt{5^2 + 10^2}$
$= 11.18$ km j^{-1}

Jika θ ialah sudut yang dibentuk dengan arah utara,

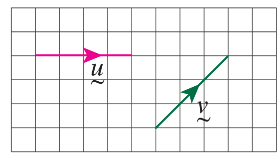
maka, $\tan \theta = \dfrac{10}{5}$

$\theta = 63.43°$

Perahu itu bergerak pada bearing 063.43° dengan halaju 11.18 km j^{-1}.

Latih Diri 8.5

1. Rajah di sebelah menunjukkan vektor $\underset{\sim}{u}$ dan vektor $\underset{\sim}{v}$.
Lukis dan labelkan vektor paduan bagi setiap yang berikut.

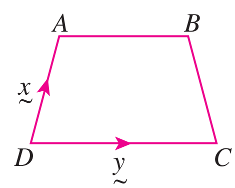


(a) $2\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v}$ (b) $\dfrac{1}{2}\underset{\sim}{v} + 2\underset{\sim}{u}$

(c) $\underset{\sim}{u} - 2\underset{\sim}{v}$ (d) $2\underset{\sim}{u} - \dfrac{3}{2}\underset{\sim}{v}$

2. Vektor $\underset{\sim}{p}$ mewakili halaju 70 km j^{-1} ke arah selatan dan vektor $\underset{\sim}{q}$ mewakili halaju 80 km j^{-1} ke arah timur. Cari arah dan magnitud vektor paduan, $\underset{\sim}{p} + \underset{\sim}{q}$.

3. Diberi $ABCD$ ialah sebuah trapezium dengan $3AB = 2DC$.
Ungkapkan yang berikut dalam sebutan $\underset{\sim}{x}$ dan $\underset{\sim}{y}$.



(a) $\overrightarrow{AB}$ (b) $\overrightarrow{AC}$

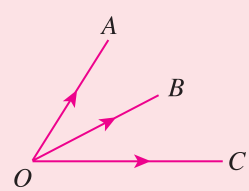
(c) $\overrightarrow{BC}$ (d) $\overrightarrow{BD}$

4. Sebuah kapal terbang melakukan penerbangan ke arah utara dari lapangan terbang P ke lapangan terbang Q sejauh 1 200 km dalam masa 2 jam. Angin bertiup dari arah barat dengan kelajuan 160 km j^{-1}. Cari
(a) halaju kapal terbang tanpa dipengaruhi oleh angin,
(b) arah asal kapal terbang itu.

Menyelesaikan masalah yang melibatkan vektor

Masalah yang melibatkan penambahan dan penolakan vektor bagi vektor selari dan vektor tidak selari boleh diselesaikan dengan menggunakan hukum segi tiga, hukum segi empat selari atau hukum poligon.

Contoh 12 APLIKASI MATEMATIK



Vektor kedudukan bagi tiga buah kereta mainan, A, B dan C ialah $\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$, $\overrightarrow{OB} = 3\underset{\sim}{a} - 2\underset{\sim}{b}$ dan $\overrightarrow{OC} = h\underset{\sim}{a} + 7\underset{\sim}{b}$, dengan h ialah pemalar. Cari nilai h dengan keadaan kereta mainan A, B dan C terletak pada satu garis lurus.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Diberi $\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$, $\overrightarrow{OB} = 3\underset{\sim}{a} - 2\underset{\sim}{b}$ dan $\overrightarrow{OC} = h\underset{\sim}{a} + 7\underset{\sim}{b}$.
- Kereta mainan A, B dan C terletak di atas satu garis lurus, maka $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ dengan k ialah pemalar.
- Hitung nilai k dan nilai h.

2. Merancang strategi

- Cari $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ menggunakan hukum segi tiga.
- Tulis hubungan $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.
- Cari nilai k dan nilai h dengan membandingkan pekali dalam hubungan $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

3. Melaksanakan strategi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\\ &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\\ &= -\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b} + 3\underset{\sim}{a} - 2\underset{\sim}{b}\\ &= 2\underset{\sim}{a} - 3\underset{\sim}{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\\ &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\\ &= -\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b} + h\underset{\sim}{a} + 7\underset{\sim}{b}\\ &= (h-1)\underset{\sim}{a} + 6\underset{\sim}{b}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$

$$(h-1)\underset{\sim}{a} + 6\underset{\sim}{b} = k(2\underset{\sim}{a} - 3\underset{\sim}{b})$$

$$(h-1)\underset{\sim}{a} + 6\underset{\sim}{b} = (2k)\underset{\sim}{a} - (3k)\underset{\sim}{b}$$

Bandingkan pekali $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$,

$h - 1 = 2k$ dan $6 = -3k$

$h = 2k + 1$ $\quad$ $k = -2$

Gantikan $k = -2$ ke dalam $h = 2k + 1$,

$$\begin{aligned}h &= 2(-2) + 1\\ &= -3\end{aligned}$$

4. Membuat refleksi

Apabila $k = -2$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= k\overrightarrow{AB}\\ &= (-2)(2\underset{\sim}{a} - 3\underset{\sim}{b})\\ &= -4\underset{\sim}{a} + 6\underset{\sim}{b}\end{aligned}$$

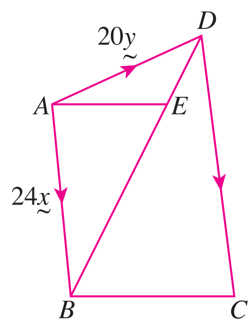
Apabila $h = -3$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= (h-1)\underset{\sim}{a} + 6\underset{\sim}{b}\\ &= (-3-1)\underset{\sim}{a} + 6\underset{\sim}{b}\\ &= -4\underset{\sim}{a} + 6\underset{\sim}{b}\end{aligned}$$

Latih Diri 8.6

1. Diberi O, X, Y dan Z ialah empat titik dengan keadaan $\overrightarrow{OX} = 4\underset{\sim}{x} - 2\underset{\sim}{y}$, $\overrightarrow{OY} = k\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}$ dan $\overrightarrow{OZ} = 6\underset{\sim}{x} + 5\underset{\sim}{y}$. Jika titik X, Y dan Z adalah segaris, cari nilai k.

2. Rajah di sebelah menunjukkan pelan bagi lorong-lorong di sebuah taman perumahan yang membentuk sebuah segi empat $ABCD$. Terdapat sebatang tiang lampu pada kedudukan E, dengan keadaan $BE : ED = 3 : 1$. Lorong AB dan DC adalah selari dan $DC = \frac{4}{3}AB$.
   (a) Ungkapkan $\overrightarrow{BD}$ dan $\overrightarrow{AE}$ dalam sebutan $\underset{\sim}{x}$ dan $\underset{\sim}{y}$.
   (b) Tunjukkan bahawa lorong AE adalah selari dengan lorong BC.



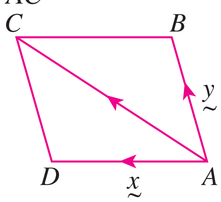
BAB 8

Latihan Intensif 8.2

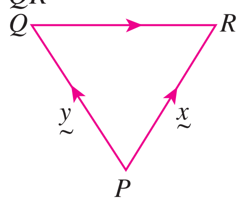
Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2Dp0haz untuk Kuiz

1. Ungkapkan vektor-vektor berikut dalam sebutan $\underset{\sim}{x}$ dan $\underset{\sim}{y}$.

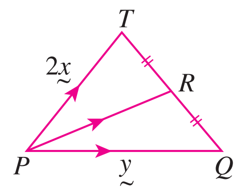
(a) $\overrightarrow{AC}$



(b) $\overrightarrow{QR}$

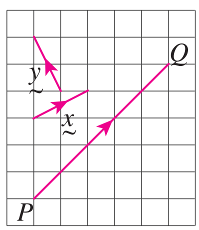


(c) $\overrightarrow{PR}$

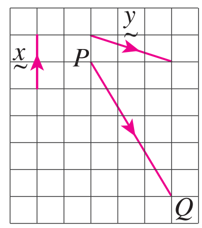


2. Bagi setiap gambar rajah berikut, ungkapkan vektor $\overrightarrow{PQ}$ dalam sebutan $\underset{\sim}{x}$ dan $\underset{\sim}{y}$.

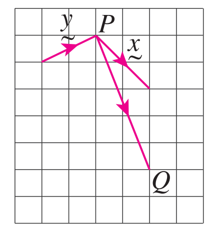
(a)



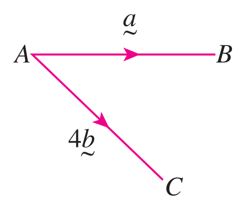
(b)



(c)

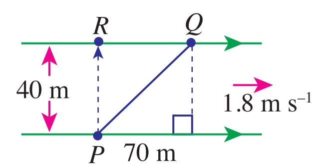


3. Dalam rajah di sebelah, $\overrightarrow{AB} = \underset{\sim}{a}$ dan $\overrightarrow{AC} = 4\underset{\sim}{b}$. Diberi Q ialah satu titik pada AC dengan keadaan $AQ : QC = 1 : 3$. Ungkapkan $\overrightarrow{BQ}$ dalam sebutan $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$.

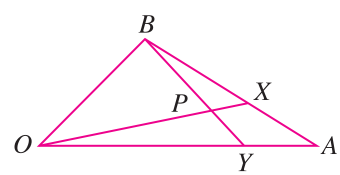


4. Diberi $\underset{\sim}{p} = 2\underset{\sim}{a} + 3\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{q} = 4\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}$ dan $\underset{\sim}{r} = h\underset{\sim}{a} + (h + k)\underset{\sim}{b}$ dengan keadaan h dan k ialah pemalar. Cari nilai h dan nilai k jika $\underset{\sim}{r} = 3\underset{\sim}{p} - 4\underset{\sim}{q}$.

5. Rajah di sebelah menunjukkan lakaran sebatang sungai. Lebar sungai itu ialah 40 m dan halaju arus mengalir ke hilir ialah 1.8 m s^{-1}. Hamid ingin mendayung perahunya dari P ke seberang sungai di R, tetapi perahunya telah dibawa arus dan berhenti di Q dalam masa 12 saat. Hitung laju Hamid mendayung perahunya.



6. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga OAB. Diberi $\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underset{\sim}{b}$, $5BX = 3BA$ dan $OY : OA = 3 : 4$.



(a) Cari yang berikut dalam sebutan $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$.

(i) $\overrightarrow{BA}$ (ii) $\overrightarrow{BX}$

(iii) $\overrightarrow{OX}$ (iv) $\overrightarrow{BY}$

(b) Diberi $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OX}$ dan $\overrightarrow{BP} = \mu\overrightarrow{BY}$. Ungkapkan $\overrightarrow{OP}$ dalam sebutan

(i) λ, $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$, (ii) μ, $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$,

(c) Seterusnya, cari nilai λ dan nilai μ.

8.3 Vektor dalam Satah Cartes

Mewakilkan vektor dan menentukan magnitud vektor dalam satah Cartes

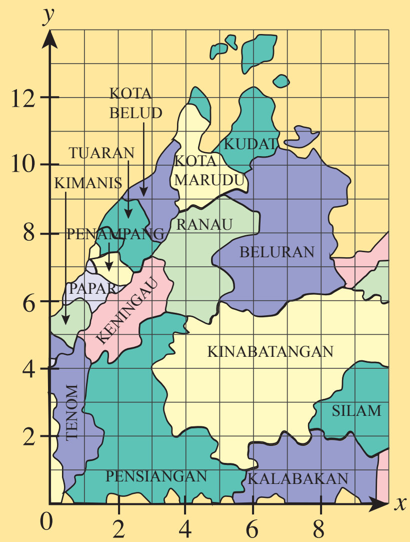
INKUIRI 3 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Mengenal vektor paduan

Arahan:

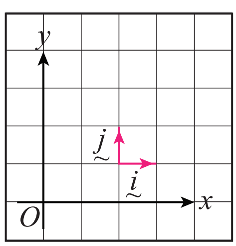
1. Perhatikan peta negeri Sabah yang dilukis pada grid satah Cartes di sebelah.
2. Teliti situasi berikut:

> Arding ingin menjelajahi daerah di Sabah. Arding berada di suatu lokasi yang terletak di koordinat (1, 3). Kemudian, dia bergerak 5 unit selari dengan paksi-x dan 4 unit selari dengan paksi-y ke suatu lagi lokasi di daerah yang lain. Dia berjanji untuk bertemu rakannya, Timan di lokasi tersebut. Timan bergerak pada translasi $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ dari tempatnya untuk bertemu dengan Arding.



3. Tandakan pada satah Cartes, pergerakan serta kedudukan Arding dan Timan.
4. Apakah nama daerah tempat mereka berdua bertemu?
5. Nyatakan translasi bagi pergerakan Arding dari lokasi daerah pertama ke lokasi daerah kedua.
6. Cari jarak, dalam unit, antara lokasi pertama Arding berada dan lokasi pertama Timan berada dengan tempat pertemuan mereka.
7. Bentangkan hasil dapatan di hadapan kelas dan lakukan sesi soal jawab bersama dengan rakan yang lain.

Hasil daripada Inkuiri 3, suatu vektor boleh diungkapkan sebagai gabungan vektor selari dan tidak selari. Pada satah Cartes, vektor akan diungkapkan sebagai gabungan vektor yang selari dengan paksi-x dan/atau paksi-y.



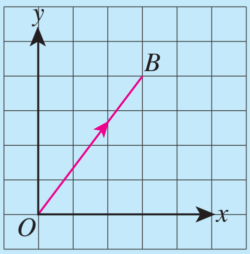
Vektor yang bermagnitud 1 unit dan selari dengan paksi-x dipanggil vektor $\underset{\sim}{i}$ dan ditulis sebagai $\underset{\sim}{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\underset{\sim}{i}| = 1$.

Vektor yang bermagnitud 1 unit dan selari dengan paksi-y dipanggil vektor $\underset{\sim}{j}$ dan ditulis sebagai $\underset{\sim}{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|\underset{\sim}{j}| = 1$.

BAB 8

8.3.1

Perhatikan rajah yang berikut:



- Koordinat titik B ialah $B(x, y)$.
- Vektor kedudukan bagi titik B relatif kepada titik O ialah $\overrightarrow{OB}$.
- $\overrightarrow{OB}$ boleh ditulis sebagai gabungan vektor $\underset{\sim}{i}$ dan $\underset{\sim}{j}$, iaitu $x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}$.
- $\overrightarrow{OB}$ boleh ditulis dalam bentuk vektor lajur, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Magnitud $\overrightarrow{OB} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Contoh 13

Diberi titik $A(1, 2)$, $B(-4, 5)$, $C(8, -3)$, $D(-7, -4)$ dan O ialah asalan pada satah Cartes. Ungkapkan vektor-vektor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ dan $\overrightarrow{OD}$ dalam bentuk

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (b) $x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}$

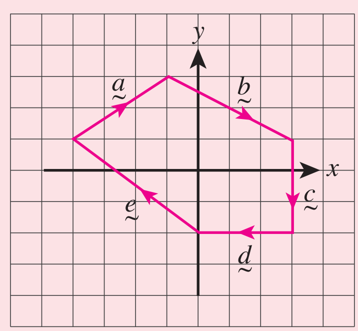
Penyelesaian

(a) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$

(b) $\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}$, $\overrightarrow{OB} = -4\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j}$, $\overrightarrow{OC} = 8\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j}$, $\overrightarrow{OD} = -7\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j}$

Contoh 14

Rajah di sebelah menunjukkan vektor $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$, $\underset{\sim}{d}$ dan $\underset{\sim}{e}$ pada suatu satah Cartes.



(a) Ungkapkan setiap vektor dalam bentuk $x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}$ dan $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(b) Cari magnitud bagi setiap vektor tersebut.

(c) Adakah vektor $\underset{\sim}{b}$ dan $\underset{\sim}{e}$ selari? Berikan alasan anda.

Penyelesaian

(a) $\underset{\sim}{a} = 3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{b} = 4\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underset{\sim}{c} = -3\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{d} = -3\underset{\sim}{i}$, $\underset{\sim}{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

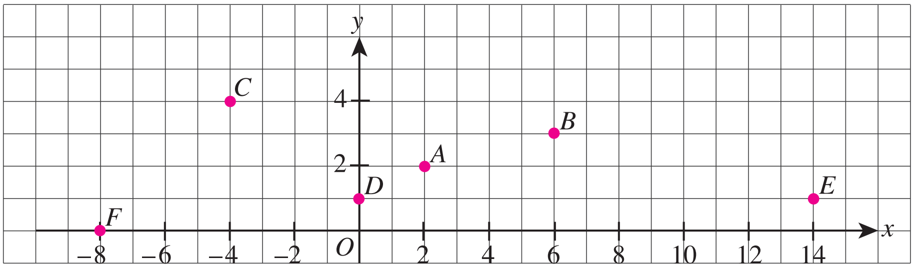
$\underset{\sim}{e} = -4\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $|\underset{\sim}{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2}$ $\quad$, $\quad$ $|\underset{\sim}{b}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2}$
$= 3.606$ unit $\quad$ $= 4.472$ unit
$|\underset{\sim}{c}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2}$ $\quad$, $\quad$ $|\underset{\sim}{d}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2}$
$= 3$ unit $\quad$ $= 3$ unit
$|\underset{\sim}{e}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2}$
$= 5$ unit

(c) Vektor $\underset{\sim}{b}$ dan $\underset{\sim}{e}$ tidak selari kerana $\underset{\sim}{b} \neq k\underset{\sim}{e}$ atau kecerunan $\underset{\sim}{b} \neq$ kecerunan $\underset{\sim}{e}$.

Latih Diri 8.7

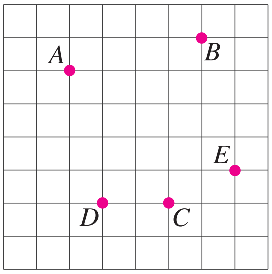
1. Rajah di bawah menunjukkan enam titik pada satah Cartes.



Ungkapkan $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{DE}$ dan $\overrightarrow{DO}$ dalam bentuk
(a) $x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}$,
(b) vektor lajur.

2. Diberi titik $A(-2\ , 3)$, $B(5, 8)$ dan O ialah asalan pada satah Cartes.
(a) Cari vektor kedudukan titik B.
(b) Hitung $|\overrightarrow{AB}|$.

3. Rajah di sebelah menunjukkan lima titik, A, B, C, D dan E pada suatu grid.



(a) Ungkapkan vektor-vektor yang berikut dalam bentuk vektor paduan bagi vektor unit $\underset{\sim}{i}$ dan $\underset{\sim}{j}$.
(i) $\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ (ii) $\overrightarrow{BA}$
(iii) $\overrightarrow{BC}$ $\qquad$ (iv) $\overrightarrow{DC}$
(v) $\overrightarrow{AC}$ $\qquad$ (vi) $\overrightarrow{DE}$
(b) Nyatakan pasangan vektor yang selari dan huraikan alasan anda.
(c) Nyatakan pasangan vektor yang negatif dan berikan alasan anda.

4. Diberi $\underset{\sim}{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{q} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$ dan $\underset{\sim}{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ masing-masing mewakili vektor kedudukan bagi titik-titik P, Q dan R.
(a) Tuliskan vektor-vektor $\underset{\sim}{p}$, $\underset{\sim}{q}$ dan $\underset{\sim}{r}$ dalam bentuk $x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}$.
(b) Nyatakan koordinat bagi titik-titik P, Q dan R.
(c) Hitung panjang vektor-vektor $\underset{\sim}{p}$, $\underset{\sim}{q}$ dan $\underset{\sim}{r}$.

8.3.1

Memerihal dan menentukan vektor unit dalam arah suatu vektor

Anda telah mempelajari bahawa $\underset{\sim}{i}$ dan $\underset{\sim}{j}$ ialah vektor unit masing-masing dalam arah yang selari dengan paksi-x dan paksi-y yang positif. Bagaimana pula dengan vektor unit pada arah vektor yang tidak selari dengan paksi-x atau paksi-y?

INKUIRI 4 Berpasangan PAK-21

Tujuan: Menentukan vektor unit dalam arah suatu vektor yang diberi

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Seret gelongsor x_1 dan y_1 untuk melihat perubahan vektor unit pada satah Cartes dan pengiraan vektor unit yang diperoleh.
3. Bandingkan vektor unit yang diperoleh bagi setiap perubahan pada nilai x_1 dan nilai y_1.
4. Bincangkan kaedah dan rumus yang digunakan untuk mencari vektor unit dalam arah suatu vektor.

ggbm.at/r39tkfzb

Hasil daripada Inkuiri 4, vektor unit dalam arah suatu vektor boleh dicari dengan membahagikan vektor dengan magnitud vektor tersebut.

Secara umum:

Jika $\underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}$, maka vektor unit dalam arah $\underset{\sim}{r}$ ialah $\hat{\underset{\sim}{r}} = \dfrac{\underset{\sim}{r}}{|\underset{\sim}{r}|} = \dfrac{x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

POKET MATEMATIK

Vektor unit ialah vektor dalam arah suatu vektor tertentu yang mempunyai magnitud 1 unit.

Contoh 15

Diberi titik $A(4, 3)$, cari vektor unit dalam arah vektor $\overrightarrow{OA}$. Ungkapkan jawapan dalam bentuk

(a) komponen $\underset{\sim}{i}$ dan $\underset{\sim}{j}$, (b) vektor lajur.

Penyelesaian

(a) $\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{a} = 4\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$

$|\underset{\sim}{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= 5$ unit

Vektor unit dalam komponen $\underset{\sim}{i}$ dan $\underset{\sim}{j}$ ialah $\hat{\underset{\sim}{a}} = \dfrac{4\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}}{5}$.

(b) Vektor unit dalam bentuk vektor lajur ialah

$$\hat{\underset{\sim}{a}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

PANTAS KIRA

Menentukan magnitud vektor $4\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$ menggunakan kalkulator saintifik.

1. Tekan MENU
2. Tekan 1
3. Tekan SHIFT +
4. Skrin akan memaparkan:
   Pol (
5. Tekan 4 SHIFT) 3 =
6. Skrin akan memaparkan:
   Pol (4, 3)
   r = 5

BAB 8

Contoh 16

Diberi $-\frac{1}{3}\underset{\sim}{i} + k\underset{\sim}{j}$ ialah vektor unit, cari nilai k.

Penyelesaian

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + k^2} = 1 \longleftarrow \text{Magnitud vektor unit ialah 1}$$

$$\sqrt{\frac{1}{9} + k^2} = 1$$

$$\frac{1}{9} + k^2 = 1$$

$$k^2 = \frac{8}{9}$$

$$k = \pm 0.9428$$

Latih Diri 8.8

1. Hitung magnitud bagi setiap vektor berikut.

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$ (d) $-12\underset{\sim}{i} - 5\underset{\sim}{j}$ (e) $6\underset{\sim}{i}$

2. Cari vektor unit pada arah setiap vektor berikut.

(a) $3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}$ (b) $-\underset{\sim}{i} - 9\underset{\sim}{j}$ (c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -8 \\ -15 \end{pmatrix}$

3. Tentukan sama ada vektor yang berikut merupakan vektor unit atau bukan.

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -0.6 \\ -0.8 \end{pmatrix}$ (d) $\frac{7}{25}\underset{\sim}{i} + \frac{24}{25}\underset{\sim}{j}$ (e) $\frac{2}{3}\underset{\sim}{i} + \frac{\sqrt{7}}{3}\underset{\sim}{j}$

4. Cari nilai k untuk setiap vektor unit berikut.

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$ (e) $0.5\underset{\sim}{i} + k\underset{\sim}{j}$ (f) $k\underset{\sim}{i} + \frac{13}{84}\underset{\sim}{j}$

5. Diberi vektor unit dalam arah vektor $\underset{\sim}{u}$ ialah $\hat{\underset{\sim}{u}} = \dfrac{p\underset{\sim}{i} + 8\underset{\sim}{j}}{\sqrt{73}}$, cari nilai-nilai yang mungkin bagi p.

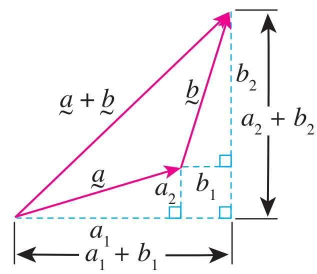
6. Diberi $\hat{\underset{\sim}{u}} = (1 - k)\underset{\sim}{i} + h\underset{\sim}{j}$, ungkapkan h dalam sebutan k.

Melaksanakan operasi aritmetik ke atas dua atau lebih vektor

A Penambahan dua atau lebih vektor

Pertimbangkan $\underset{\sim}{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

$$\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$



Maka, $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = (a_1\underset{\sim}{i} + a_2\underset{\sim}{j}) + (b_1\underset{\sim}{i} + b_2\underset{\sim}{j})$
$= (a_1 + b_1)\underset{\sim}{i} + (a_2 + b_2)\underset{\sim}{j}$

Kumpulkan komponen $\underset{\sim}{i}$ dan $\underset{\sim}{j}$, kemudian jumlahkan secara berasingan

Contoh 17

Cari hasil tambah bagi vektor berikut.

(a) $\underset{\sim}{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan $\underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

(b) $\underset{\sim}{v} = 3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}$ dan $\underset{\sim}{w} = 4\underset{\sim}{i} - 5\underset{\sim}{j}$

Penyelesaian

(a) $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{w} = (3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}) + (4\underset{\sim}{i} - 5\underset{\sim}{j})$
$= (3 + 4)\underset{\sim}{i} + (2 - 5)\underset{\sim}{j}$
$= 7\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j}$

B Penolakan antara dua vektor

Kaedah yang sama seperti operasi penambahan vektor boleh digunakan untuk operasi penolakan antara dua vektor.

Contoh 18

Cari $\underset{\sim}{p} - \underset{\sim}{q}$ bagi pasangan vektor berikut.

(a) $\underset{\sim}{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan $\underset{\sim}{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\underset{\sim}{p} = 2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}$ dan $\underset{\sim}{q} = 3\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j}$

Penyelesaian

(a) $\underset{\sim}{p} - \underset{\sim}{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 7 - 4 \\ -1 - 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $\underset{\sim}{p} - \underset{\sim}{q} = (2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}) - (3\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j})$
$= (2 - 3)\underset{\sim}{i} + (-1 - 5)\underset{\sim}{j}$
$= -\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j}$

C Pendaraban vektor dengan skalar

Apabila suatu vektor didarab dengan suatu skalar, kedua-dua komponen $\underset{\sim}{i}$ dan $\underset{\sim}{j}$ juga didarabkan dengan skalar itu.

Contoh 19

Bagi setiap vektor berikut, cari

(a) $-3\underset{\sim}{s}$, diberi $\underset{\sim}{s} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(b) $2\underset{\sim}{r}$, diberi $\underset{\sim}{r} = 5\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j}$.

Penyelesaian

(a) $-3\underset{\sim}{s} = -3\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$

(b) $2\underset{\sim}{r} = 2(5\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j}) = 10\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j}$

TIP PINTAR

Operasi aritmetik yang melibatkan **vektor selari** dilaksanakan menggunakan kaedah yang sama seperti **vektor tidak selari.**

D Gabungan operasi aritmetik ke atas vektor

Gabungan operasi aritmetik yang dilakukan ke atas beberapa vektor perlu mematuhi peraturan operasi matematik. Operasi pendaraban dengan skalar perlu dilakukan terlebih dahulu diikuti dengan operasi penambahan dan penolakan.

Contoh 20

Diberi $\underset{\sim}{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{q} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $\underset{\sim}{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, tentukan vektor $3\underset{\sim}{p} + \underset{\sim}{q} - 2\underset{\sim}{r}$.

Penyelesaian

$$
\begin{aligned}
3\underset{\sim}{p} + \underset{\sim}{q} - 2\underset{\sim}{r} &= 3\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 16 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Latih Diri 8.9

1. Diberi $\underset{\sim}{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$ dan $\underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, cari

(a) $2\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}$ (b) $-3\underset{\sim}{a} + 2\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{c}$ (c) $\frac{1}{2}\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c} - 3\underset{\sim}{a}$ (d) $\frac{1}{4}\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a} + 3\underset{\sim}{c}$

2. Diberi $\underset{\sim}{u} = 3\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{v} = -2\underset{\sim}{i} - 8\underset{\sim}{j}$ dan $\underset{\sim}{w} = 3\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j}$, cari

(a) $\underset{\sim}{u} - 2\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{w}$ (b) $3\underset{\sim}{u} + 2\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{w}$ (c) $\frac{1}{2}\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{w} - 3\underset{\sim}{u}$ (d) $\frac{1}{4}\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{w} + 3\underset{\sim}{u}$

BAB 8

Menyelesaikan masalah yang melibatkan vektor

Dengan mengaplikasikan pengetahuan yang telah dipelajari, masalah melibatkan vektor boleh diselesaikan dengan mudah terutamanya masalah yang melibatkan kehidupan seharian.

Contoh 21

APLIKASI MATEMATIK

Satu zarah bergerak dari titik $A(5, 10)$ dengan vektor halaju $(3\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j})$ m s^{-1}. Selepas t saat meninggalkan A, zarah itu berada di titik S dengan keadaan $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + t\underset{\sim}{v}$. Cari laju dan kedudukan zarah itu dari O selepas 4 saat. Bilakah zarah itu berada di sebelah kanan asalan O?

Penyelesaian

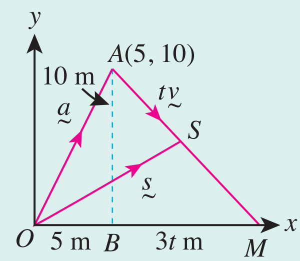
1. Memahami masalah

- Vektor kedudukan asal,
  $\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{a} = 5\underset{\sim}{i} + 10\underset{\sim}{j} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$.
- Vektor halaju, $\underset{\sim}{v} = 3\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Laju ialah magnitud vektor halaju.
- Zarah berada di bahagian kanan O jika komponen $\underset{\sim}{j}$ dalam vektor kedudukan ialah sifar.

2. Merancang strategi

- Cari $|\underset{\sim}{v}|$ untuk menentukan laju.
- Cari kedudukan zarah selepas 4 saat menggunakan $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + t\underset{\sim}{v}$ atau $\underset{\sim}{s} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{v}t$ apabila $t = 4$.
- Zarah berada di sebelah kanan O apabila komponen y dalam $\underset{\sim}{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ adalah sifar.

3. Melaksanakan strategi



Laju, $|\underset{\sim}{v}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2}$
$= \sqrt{10}$ m s^{-1}

Selepas 4 saat, $\underset{\sim}{s} = \underset{\sim}{a} + 4\underset{\sim}{v}$,

$\underset{\sim}{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$

Zarah berada di titik (17, 6).

Vektor kedudukan selepas t saat,

$\underset{\sim}{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 5 + 3t \\ 10 - t \end{pmatrix}$

Kedudukan zarah itu selepas t saat ialah $\overrightarrow{OS} = \underset{\sim}{s} = \begin{pmatrix} 5 + 3t \\ 10 - t \end{pmatrix}$.

Zarah berada di sebelah kanan asalan O apabila

$y = 0$
$10 - t = 0$
$t = 10$ saat

4. Membuat refleksi

Jarak $AM = \sqrt{30^2 + 10^2}$
$= \sqrt{1\,000}$ m

Maka, laju $= \dfrac{\sqrt{1\,000}}{10}$
$= \sqrt{10}$ m s^{-1}

BAB 8

Latih Diri 8.10

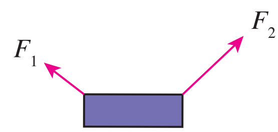
1. Sebuah kereta mainan berada di titik $A(-3, -2)$. Kereta itu kemudian digerakkan dengan halaju malar $(2\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j})$ cm s^{-1}. Cari vektor kedudukan kereta mainan itu selepas 2.5 saat.

2. Vektor kedudukan bot A, t jam selepas meninggalkan pelabuhan O ialah $t\begin{pmatrix}30\\15\end{pmatrix}$ manakala vektor kedudukan bot B ialah $\begin{pmatrix}50\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$. Tentukan halaju bot A dan bot B. Adakah kedua-dua bot itu dapat bertembung?

Latihan Intensif 8.3

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2FQyi5o untuk kuiz

1. Dua daya $F_1 = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ dan $F_2 = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$ dikenakan ke atas suatu objek seperti rajah di sebelah.
   (a) Cari daya paduan.
   (b) Hitung magnitud daya paduan itu.



2. Diberi $\underset{\sim}{p} = (k-3)\underset{\sim}{i} + 14\underset{\sim}{j}$ dan $\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{i} + (k-8)\underset{\sim}{j}$ dengan k ialah pemalar. Jika $\underset{\sim}{p}$ selari dengan $\underset{\sim}{q}$, cari nilai k.

3. Diberi $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{b}$, dengan $\underset{\sim}{a} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ dan $\underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix}m\\-6\end{pmatrix}$. Jika $\underset{\sim}{u}$ selari dengan $\underset{\sim}{v}$, cari nilai m. Seterusnya, cari $|\underset{\sim}{u}| : |\underset{\sim}{v}|$.

4. Diberi segi tiga ABC dengan $\overrightarrow{AB} = 2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}$ dan $\overrightarrow{AC} = 10\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j}$. R ialah satu titik pada BC dengan keadaan $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Cari
   (a) $\overrightarrow{BC}$,
   (b) vektor unit dalam arah $\overrightarrow{BC}$,
   (c) $\overrightarrow{AR}$.

5. Seorang perenang berenang dengan halaju $\underset{\sim}{v} = \begin{pmatrix}2.4\\1.5\end{pmatrix}$. Terdapat arus yang mengalir dengan halaju $\underset{\sim}{a} = \begin{pmatrix}0.5\\-2.1\end{pmatrix}$. Cari magnitud dan arah bagi halaju paduan perenang itu.

6. Diberi $\underset{\sim}{r} = 2\underset{\sim}{i} - 5\underset{\sim}{j}$ dan $\underset{\sim}{s} = m\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j}$, cari nilai m jika
   (a) $|\underset{\sim}{r} + \underset{\sim}{s}| = 10$,
   (b) $\underset{\sim}{r}$ selari dengan $\underset{\sim}{s}$,
   (c) $(2\underset{\sim}{r} - \underset{\sim}{s})$ selari dengan paksi-y.

7. Diberi $\begin{pmatrix}k\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ ialah vektor unit, cari nilai k.

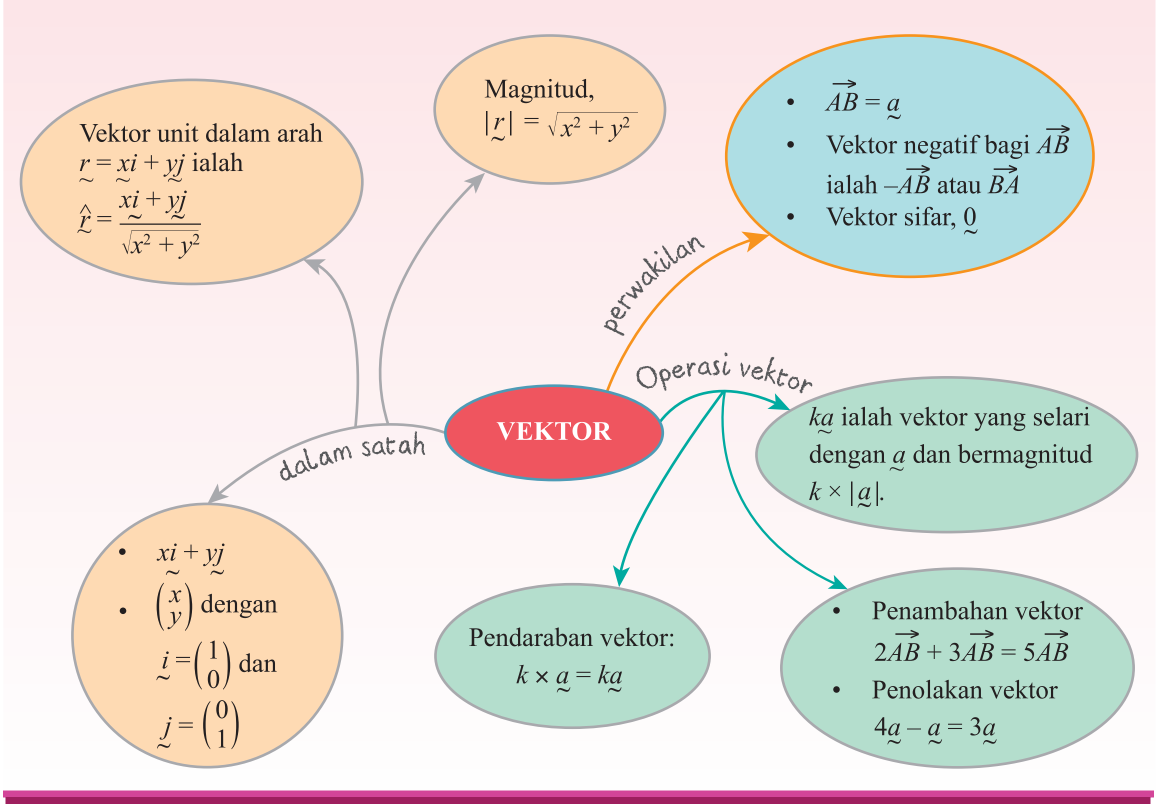
8. Panjang vektor $\underset{\sim}{v}$ ialah 5 unit dan arahnya bertentangan dengan vektor $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, cari vektor $\underset{\sim}{v}$.

8.3.4

9. Vektor $\underset{\sim}{p} = (m - 1)\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}$ adalah berserenjang dengan vektor $\underset{\sim}{q} = 8\underset{\sim}{i} + n\underset{\sim}{j}$. Ungkapkan m dalam sebutan n.

10. Kapal M meninggalkan pelabuhan O semasa laut tenang, dengan halaju $v_M = 6\underset{\sim}{i} + 8\underset{\sim}{j}$ km j^{-1}. Pada masa yang sama, kapal N belayar dari pelabuhan Q dengan halaju $v_N = 4\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}$ km j^{-1}. Diberi vektor kedudukan pelabuhan Q, $\overrightarrow{OQ} = 50\underset{\sim}{i} + 20\underset{\sim}{j}$.
   (a) Selepas t jam, vektor kedudukan kapal M ialah $\overrightarrow{OM} = t(6\underset{\sim}{i} + 8\underset{\sim}{j})$. Cari vektor kedudukan bagi kapal N pada masa itu.
   (b) Tunjukkan bahawa kapal M akan memintas kapal N dan cari masa apabila keadaan ini berlaku.

RUMUSAN BAB 8



TULIS JURNAL ANDA

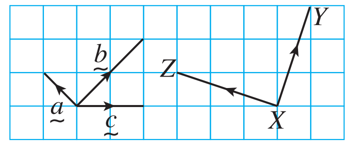
Secara berpasangan, cari perbezaan antara kuantiti skalar dan kuantiti vektor. Bandingkan kaedah yang digunakan untuk melaksanakan operasi aritmetik bagi kedua-dua kuantiti itu. Seterusnya, cari maklumat di Internet mengenai penggunaan vektor dalam kehidupan seharian. Tulis laporan dan bincangkan dapatan anda.

LATIHAN PENGUKUHAN

1. Rajah di sebelah menunjukkan tiga vektor, $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ dan $\underset{\sim}{c}$ yang tidak selari. Ungkapkan TP1

(a) $\overrightarrow{XY}$ dalam sebutan $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{b}$,

(b) $\overrightarrow{XZ}$ dalam sebutan $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{c}$.



2. Diberi $\overrightarrow{PQ} = 3k\underset{\sim}{a} - 4\underset{\sim}{b}$ dan $\overrightarrow{XY} = 4\underset{\sim}{a} + 8\underset{\sim}{b}$. Jika $\overrightarrow{PQ}$ selari dengan $\overrightarrow{XY}$, cari nilai k. TP2

3. Diberi $\underset{\sim}{p} = m\underset{\sim}{i} - n\underset{\sim}{j}$ ialah vektor unit dalam arah $\underset{\sim}{p}$, ungkapkan m dalam sebutan n. TP2

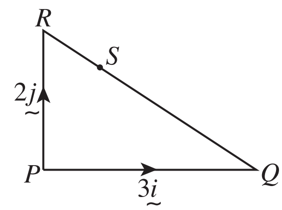
4. Diberi $\underset{\sim}{u} = k\underset{\sim}{i} + h\underset{\sim}{j}$ dan $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j}$. Jika $|\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v}| = \sqrt{k^2 + h^2}$, ungkapkan h dalam sebutan k. TP2

5. Diberi $A(3, 4)$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ dan $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$. Cari TP2

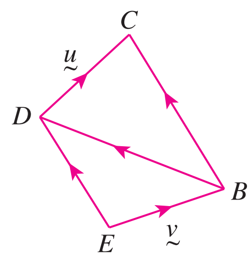
(a) vektor unit dalam arah $\overrightarrow{AC}$,

(b) koordinat C.

6. Rajah di sebelah menunjukkan segi tiga PQR dengan keadaan $\overrightarrow{PQ} = 3\underset{\sim}{i}$ dan $\overrightarrow{PR} = 2\underset{\sim}{j}$. Diberi $\overrightarrow{RS} : \overrightarrow{SQ} = 2 : 3$, ungkapkan $\overrightarrow{RS}$ dalam sebutan $\underset{\sim}{i}$ dan $\underset{\sim}{j}$. TP3



7. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah trapezium $BCDE$ dengan keadaan $\overrightarrow{DC} = \underset{\sim}{u}$ dan $\overrightarrow{EB} = \underset{\sim}{v}$. Jika $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, ungkapkan $\overrightarrow{BC}$ dalam sebutan $\underset{\sim}{u}$ dan $\underset{\sim}{v}$. TP3



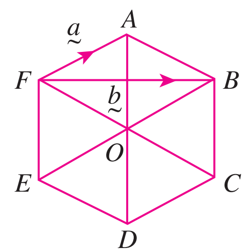
8. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah heksagon sekata, $ABCDEF$ dengan pusat O. Diberi $\overrightarrow{FA} = \underset{\sim}{a}$ dan $\overrightarrow{FB} = \underset{\sim}{b}$, TP3

(a) ungkapkan setiap yang berikut dalam sebutan $\underset{\sim}{a}$ dan/atau $\underset{\sim}{b}$,

(i) $\overrightarrow{AB}$	(ii) $\overrightarrow{FO}$	(iii) $\overrightarrow{FC}$
(iv) $\overrightarrow{BC}$	(v) $\overrightarrow{FD}$	(vi) $\overrightarrow{AD}$

(b) nyatakan hubungan antara $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{FC}$.

(c) tentukan sama ada $\overrightarrow{AC}$ dan $\overrightarrow{FD}$ adalah selari atau tidak.



BAB 8

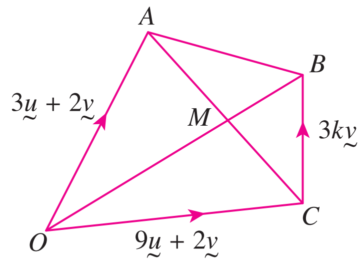
9. Vektor kedudukan bandar A ialah $-10\underset{\sim}{i} + 10\underset{\sim}{j}$ dan vektor kedudukan bandar B ialah $10\underset{\sim}{i} - 11\underset{\sim}{j}$. Bandar A, B dan C terletak pada satu garis lurus dengan keadaan jarak di antara bandar A dengan bandar C adalah dua kali jarak di antara bandar A dengan bandar B. Jarak di antara bandar diukur dalam kilometer. Cari TP4

(a) vektor $\overrightarrow{AB}$,

(b) jarak di antara bandar A dengan bandar B,

(c) vektor $\overrightarrow{OC}$.

10. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah sisi empat $OABC$. M ialah titik tengah AC dan $OM : OB = 2 : 3$. Diberi $\overrightarrow{OA} = 3\underset{\sim}{u} + 2\underset{\sim}{v}$, $\overrightarrow{OC} = 9\underset{\sim}{u} + 2\underset{\sim}{v}$ dan $\overrightarrow{CB} = 3k\underset{\sim}{v}$, dengan k ialah pemalar, TP4



(a) ungkapkan dalam sebutan $\underset{\sim}{u}$ dan/atau $\underset{\sim}{v}$,

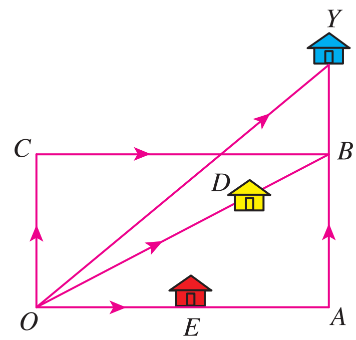
(i) $\overrightarrow{AC}$ (ii) $\overrightarrow{OM}$

(b) ungkapkan $\overrightarrow{OB}$ dalam sebutan

(i) $\underset{\sim}{u}$ dan $\underset{\sim}{v}$, (ii) $\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{v}$ dan k.

Seterusnya, cari nilai k.

11. Rajah di sebelah menunjukkan jalan di sebuah taman perumahan yang membentuk sebuah segi empat tepat $OABC$. Bangunan D terletak di jalan OB dan bangunan E terletak di jalan OA. Diberi $OD = \frac{3}{4}OB$ dan $OE : OA = 1 : 2$. Bangunan Y pula terletak di jalan AB yang dipanjangkan dengan keadaan $BY = \frac{1}{2}AB$. Jalan OA diwakili oleh vektor $4\underset{\sim}{a}$ manakala jalan OC diwakili oleh vektor $4\underset{\sim}{c}$. TP5

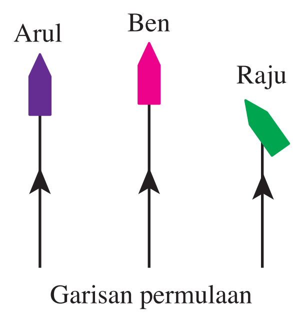


(a) Ungkapkan vektor yang mewakili jalan berikut dalam sebutan $\underset{\sim}{a}$ dan $\underset{\sim}{c}$.

(i) $\overrightarrow{OB}$ (ii) $\overrightarrow{OD}$ (iii) $\overrightarrow{OY}$ (iv) $\overrightarrow{ED}$

(b) Buktikan bahawa bangunan E, D dan Y berada dalam satu garis lurus.

12. Rajah di sebelah menunjukkan kedudukan dan arah bot Arul, Ben dan Raju dalam suatu pertandingan bot solar. Bot Arul dan Ben bergerak mengikut arah arus air. Halaju arus air diberi oleh $\underset{\sim}{w} = \left(\underset{\sim}{i} + \frac{1}{3}\underset{\sim}{j}\right)$ m s^{-1}, manakala halaju bot Arul ialah $\underset{\sim}{a} = (3\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j})$ m s^{-1} dan halaju bot Ben ialah $\underset{\sim}{b} = (6\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j})$ m s^{-1}. TP5

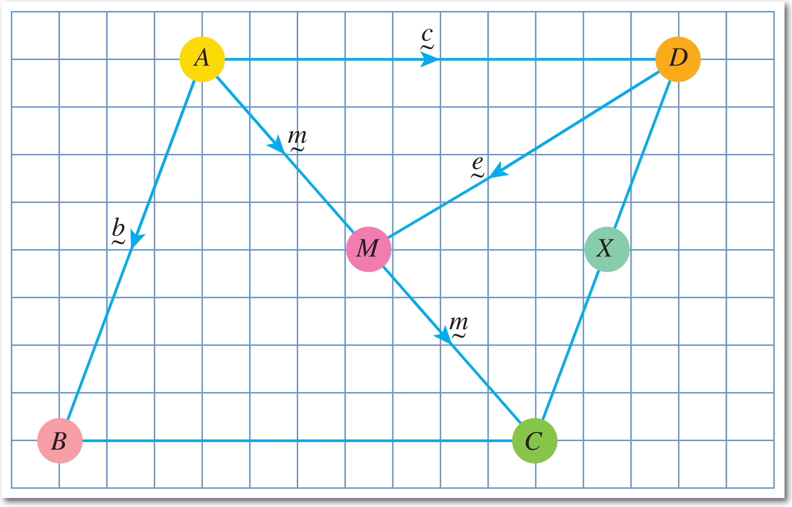


(a) Hitung halaju paduan bot Arul dan halaju paduan bot Ben. Seterusnya, cari beza antara laju kedua-dua bot itu.

(b) Bot Raju telah tersasar dari haluan. Diberi halaju bot Raju ialah $\underset{\sim}{r} = \left(2\underset{\sim}{i} - \frac{4}{3}\underset{\sim}{j}\right)$ m s^{-1}. Cari vektor unit dalam arah halaju paduan bot tersebut.

Penerokaan MATEMATIK

Puan Tan ialah seorang suri rumah yang sering ke beberapa lokasi setiap hari. Rajah di bawah menunjukkan vektor sesaran $\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{e}$ dan $\underset{\sim}{m}$ yang mewakili perjalanan Puan Tan dari rumahnya di A ke lokasi yang selalu dikunjunginya.



Penunjuk:
A : Rumah Puan Tan
B : Pasar
C : Rumah ibu
D : Sekolah
M : Tadika
X : Kedai runcit

Tuliskan vektor-vektor $\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{e}$ dan $\underset{\sim}{m}$ dalam bentuk $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dan $x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}$. [1 sisi = 1 km].

1. Seterusnya, cari jarak terdekat dari rumah Puan Tan ke setiap lokasi mengikut vektor sesaran yang diberi.

2. Puan Tan akan menghantar anak lelakinya ke tadika sebelum menghantar anak perempuannya ke sekolah. Perhatikan bahawa vektor paduan $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \underset{\sim}{m} - \underset{\sim}{e}$ mematuhi hukum segi tiga. Nyatakan vektor-vektor paduan lain yang mematuhi:
(a) Hukum segi tiga, (b) Hukum segi empat selari, (c) Hukum poligon.

3. Salin dan lengkapkan jadual berikut dengan mengisi vektor paduan yang diwakili oleh gabungan vektor melalui operasi aritmetik vektor-vektor berikut.

	Operasi aritmetik	Vektor paduan		Operasi aritmetik	Vektor paduan		Operasi aritmetik	Vektor paduan
(a)	$\underset{\sim}{m} - \underset{\sim}{e}$	$\overrightarrow{AD}$	(f)	$\underset{\sim}{c} - \frac{\underset{\sim}{b}}{2}$		(k)	$\underset{\sim}{m} - \underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{b}$	
(b)	$\underset{\sim}{m} - \frac{\underset{\sim}{b}}{2}$		(g)	$\frac{\underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{b}}{2}$		(l)	$\frac{\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{c}}{2}$	
(c)	$\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{c}$		(h)	$\underset{\sim}{c} - 2\underset{\sim}{m}$		(m)	$\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{m} - \underset{\sim}{e}$	
(d)	$\frac{\underset{\sim}{b}}{2}$		(i)	$\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c} - \frac{\underset{\sim}{b}}{2}$		(n)	$\frac{\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}}{2}$	
(e)	$\underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{e} + \underset{\sim}{m}$		(j)	$\underset{\sim}{b} - 2\underset{\sim}{m}$		(o)	$\underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{c}$	

BAB 9

Penyelesaian Segi Tiga

Apakah yang akan dipelajari?

- Petua Sinus
- Petua Kosinus
- Luas Segi Tiga
- Aplikasi Petua Sinus, Petua Kosinus dan Luas Segi Tiga

Senarai Standard Pembelajaran

bit.ly/2BPAxSY

KATA KUNCI

Sudut tirus	*Acute angle*
Sudut cakah	*Obtuse angle*
Petua sinus	*Sine rule*
Petua kosinus	*Cosine rule*
Kes berambiguiti	*Ambiguous case*
Sudut kandung	*Included angle*
Sudut bukan kandung	*Non-included angle*
Tiga matra	*Three dimension*

Seni bina yang berbentuk segi tiga menimbulkan keunikan pada sesebuah bangunan. Bentuk ini turut dijadikan hiasan pada bahagian dinding bangunan untuk menonjolkan imej yang lebih segar dan moden. Keunikan bentuk segi tiga pada seni bina ini sememangnya mampu membuatkan kita tertawan. Namun, bagaimanakah kita dapat menentukan tinggi bagi seni bina tersebut? Apakah maklumat yang diperlukan untuk mengukur luas setiap segi tiga itu?

Tahukah Anda?

Abu Wafa Muhammad Ibn Muhammad Ibn Yahya Ibn Ismail Buzjani (940-997 M) ialah seorang ahli astronomi dan ahli matematik Persia. Abu Wafa telah mempelajari trigonometri di Iraq pada tahun 959 M dan telah mengembangkan beberapa teori penting terutamanya dalam bidang geometri dan trigonometri.

Untuk maklumat lanjut:

bit.ly/2DExRsO

SIGNIFIKAN BAB INI

Terdapat pelbagai bidang yang menggunakan segi tiga untuk menyelesaikan suatu masalah. Misalnya:

- Bidang astronomi menggunakan konsep segi tiga untuk mengukur jarak antara bintang.
- Bidang geografi menggunakan penyelesaian segi tiga untuk mengukur jarak antara tempat.
- Bidang satelit menggunakan segi tiga dalam sistem pandu arah satelit.

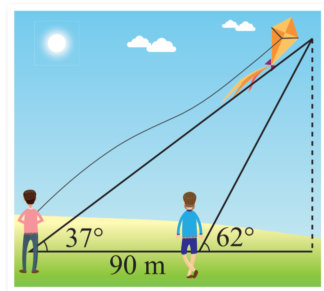
Imbas kod *QR* ini untuk menonton video di Masbro Village, Melaka.

bit.ly/2VjgB3F

9.1 Petua Sinus

Membuat dan mengesahkan hubungan antara sisi-sisi suatu segi tiga dengan sinus sudut-sudut yang bertentangan

Dalam kehidupan seharian, kita sering berhadapan dengan situasi yang melibatkan segi tiga. Contohnya, penyelesaian untuk mencari tinggi layang-layang. Apabila melibatkan segi tiga bukan bersudut tegak, teorem Pythagoras tidak sesuai digunakan. Terdapat kaedah lain untuk mencari penyelesaian bagi segi tiga yang bukan bersudut tegak. Mari kita teroka.

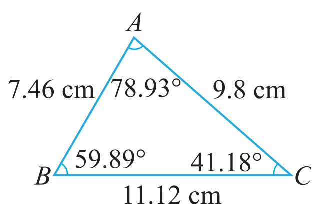
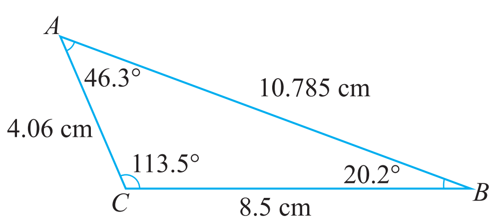


INKUIRI 1 Berpasangan

Tujuan: Membuat konjektur tentang hubungan antara nisbah panjang sisi-sisi suatu segi tiga dengan sinus sudut-sudut yang bertentangan

Arahan:

1. Salin atau cetak jadual di bawah.
2. Lengkapkan jadual yang berikut berdasarkan segi tiga yang diberi.

	Segi tiga	$\frac{a}{\sin A}$	$\frac{b}{\sin B}$	$\frac{c}{\sin C}$
(a)	Segi tiga bersudut tirus 			
(b)	Segi tiga bersudut cakah 			

3. Bincang bersama dengan rakan anda secara berpasangan dan nyatakan konjektur tentang hubungan antara nisbah panjang sisi segi tiga dengan sinus sudut bertentangannya.

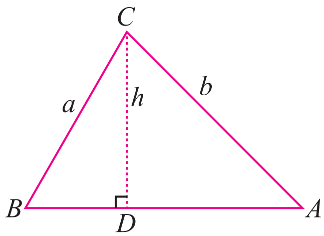
BAB 9

Hasil daripada Inkuiri 1, didapati bahawa

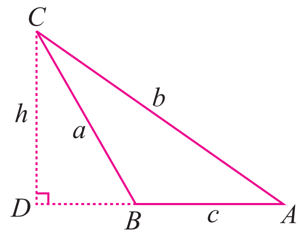
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{atau} \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Adakah konjektur ini sah untuk semua jenis segi tiga bersudut tirus dan segi tiga bersudut cakah? Mari kita teroka.

Rajah (a) dan Rajah (b) masing-masing ialah segi tiga bersudut tirus dan segi tiga bersudut cakah. *CD* adalah berserenjang dengan *AB* dan diwakili dengan *h*.



Rajah (a) Segi tiga bersudut tirus



Rajah (b) Segi tiga bersudut cakah

Pertimbangkan segi tiga *BCD*,

$$\frac{h}{a} = \sin B$$

Maka, $h = a \sin B \quad \cdots ①$

Pertimbangkan segi tiga *ACD*,

$$\frac{h}{b} = \sin A$$

Maka, $h = b \sin A \quad \cdots ②$

① = ②, $a \sin B = b \sin A$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

atau $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

Perhatikan bahawa bagi sebarang segi tiga bersudut tirus dan segi tiga bersudut cakah, nisbah panjang sisi-sisi dengan sinus sudut-sudut yang bertentangan adalah sama. Hubungan ini dikenali sebagai **petua sinus**.

QR

Hubungan antara nisbah bagi panjang sisi-sisi segi tiga dengan sinus sudut-sudut bertentangan menggunakan perisian *GeoGebra*.

ggbm.at/vcpqang5

Petua Sinus

Bagi sebarang segi tiga *ABC*,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{atau} \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

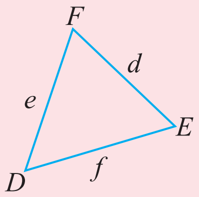
Cabar Minda

Apakah yang akan diperoleh jika petua sinus digunakan pada segi tiga bersudut tegak?

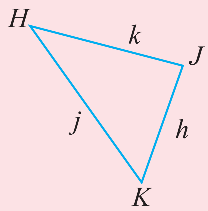
Contoh 1

Tulis petua sinus yang menghubungkan sisi dan sudut bagi segi tiga yang berikut.

(a)



(b)



Penyelesaian

(a) $\dfrac{d}{\sin D} = \dfrac{e}{\sin E} = \dfrac{f}{\sin F}$

(b) $\dfrac{h}{\sin H} = \dfrac{j}{\sin J} = \dfrac{k}{\sin K}$

QR

Ulang kaji penyelesaian segi tiga bersudut tegak.

bit.ly/2A5tci8

Cabar Minda

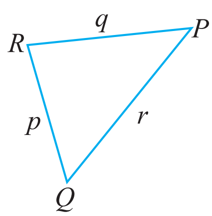
Bincang bersama dengan rakan anda dan buktikan

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$

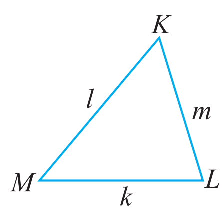
Latih Diri 9.1

1. Tulis petua sinus yang menghubungkan sisi dan sudut bagi segi tiga yang berikut.

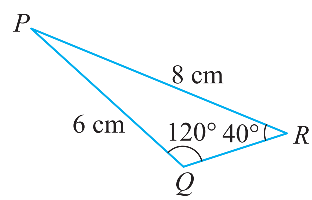
(a)



(b)



(c)



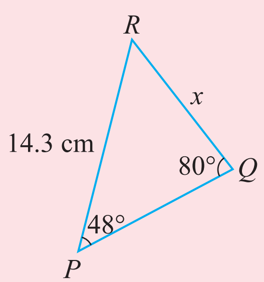
Menyelesaikan segi tiga melibatkan petua sinus

Menyelesaikan segi tiga bermaksud mencari ukuran seperti panjang sisi, saiz sudut, perimeter atau luas segi tiga. Kita boleh menyelesaikan sesuatu masalah yang melibatkan segi tiga menggunakan petua sinus.

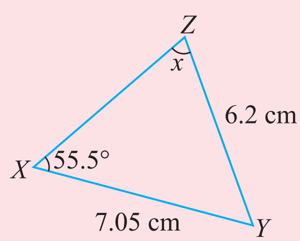
Contoh 2

Cari nilai x dalam segi tiga yang berikut.

(a)



(b)



Penyelesaian

(a) $\dfrac{x}{\sin 48^\circ} = \dfrac{14.3}{\sin 80^\circ}$

$x = \dfrac{14.3}{\sin 80^\circ} \times \sin 48^\circ$

$= 10.791$ cm

(b) $\dfrac{\sin x}{7.05} = \dfrac{\sin 55.5^\circ}{6.2}$

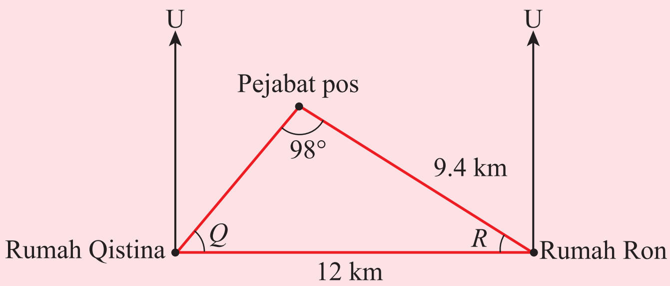
$\sin x = \dfrac{\sin 55.5^\circ}{6.2} \times 7.05$

$= 0.9371$

$x = 69.57^\circ$

Contoh 3

Rajah di bawah menunjukkan kedudukan rumah Qistina, rumah Ron dan sebuah pejabat pos.



Hitung
(a) bearing pejabat pos dari rumah Qistina,
(b) bearing pejabat pos dari rumah Ron,
(c) jarak dari rumah Qistina ke pejabat pos.

Penyelesaian

Anggap kedudukan pejabat pos, rumah Qistina dan rumah Ron masing-masing diwakili oleh P, Q dan R.

(a) $\dfrac{\sin 98^\circ}{12} = \dfrac{\sin Q}{9.4}$

$\sin Q = \dfrac{\sin 98^\circ}{12} \times 9.4$

$= 0.7757$

$\angle Q = 50.87^\circ$

Bearing P dari $Q = 90^\circ - 50.87^\circ$

$= 39.13^\circ$

Maka, bearing pejabat pos dari rumah Qistina ialah 039.13°.

(b) $\angle R = 180^\circ - \angle P - \angle Q$

$= 180^\circ - 98^\circ - 50.87^\circ$

$= 31.13^\circ$

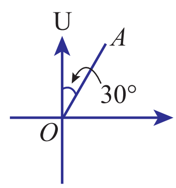
Bearing P dari $R = 270^\circ + 31.13^\circ$

$= 301.13^\circ$

Maka, bearing pejabat pos dari rumah Ron ialah 301.13°.

IMBAS KEMBALI

Dalam bidang Geografi, bearing digunakan untuk mengetahui arah sesuatu tempat dari satu titik rujukan. Contohnya:



Bearing *A* dari *O* dalam rajah di atas ditulis sebagai 030° atau U30°T.

TIP PINTAR

Untuk menyelesaikan segi tiga menggunakan petua sinus, syarat berikut perlu diketahui terlebih dahulu:
(a) Dua sudut dan satu panjang sisi, atau
(b) Dua panjang sisi dan satu sudut bukan kandung.

Cabar Minda

Apakah sudut bukan kandung? Jelaskan.

(c) $\dfrac{r}{\sin 31.13°} = \dfrac{12}{\sin 98°}$ ← r mewakili jarak dari rumah Qistina ke pejabat pos

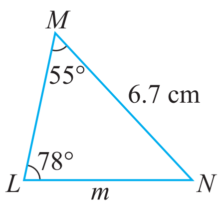
$$r = \frac{12}{\sin 98°} \times \sin 31.13°$$
$$= 6.265$$

Maka, jarak dari rumah Qistina ke pejabat pos ialah 6.265 km.

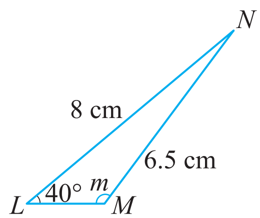
Latih Diri 9.2

1. Tentukan nilai m bagi setiap segi tiga yang berikut.

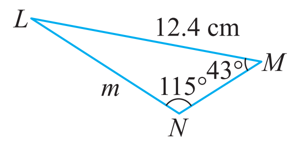
(a)



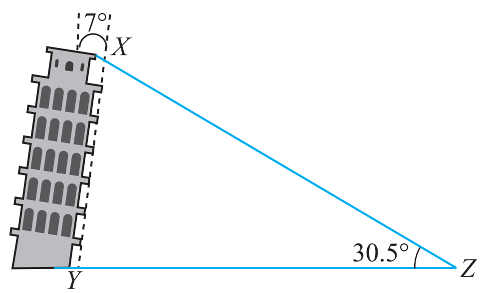
(b)



(c)

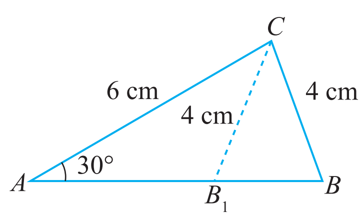


2. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah menara yang condong sebanyak 7° dari garis menegak. Pada jarak 100 m dari sisi menara itu, sudut dongaknya ialah 30.5°. Anggarkan tinggi XY bangunan itu, dalam m.



Menentukan kewujudan dan menyelesaikan masalah kes berambiguiti suatu segi tiga

Rajah di bawah menunjukkan dua segi tiga, ABC dan AB_1C dengan ukuran bagi panjang dua sisi dan sudut bukan kandung diberi seperti berikut:



POKET MATEMATIK

Ambiguiti bermaksud kesamaran atau ketidaktentuan yang memungkinkan dua tafsiran dibuat terhadap sesuatu.

Berdasarkan rajah di atas, perhatikan bahawa dua segi tiga yang berbeza bentuk dapat dibina menggunakan saiz sudut bukan kandung dan panjang dua sisi yang diberi. Dua segi tiga yang dapat dibina dengan satu set maklumat yang sama seperti ini dikenali sebagai **kes berambiguiti**.

INKUIRI 2 **Berkumpulan** **PAK-21**

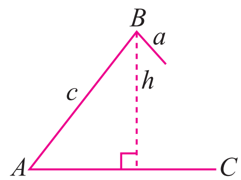
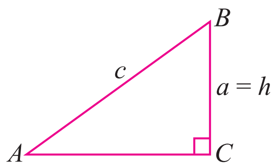
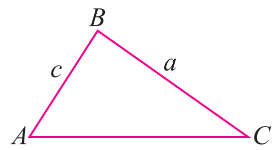
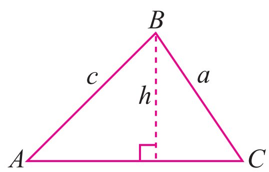
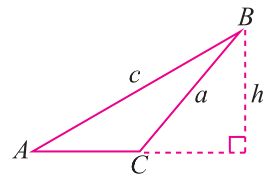
Tujuan: Menentukan syarat kewujudan kes berambiguiti

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Diberi $\angle BAC = 45°$, panjang sisi, $c = 10$ cm dan h ialah tinggi segi tiga.
3. Seret gelongsor a ke kiri dan ke kanan. Perhatikan perubahan yang berlaku.
4. Lakukan perbincangan dalam kumpulan dan jawab soalan-soalan yang berikut:
   (a) Nyatakan pemerhatian anda apabila
   (i) $a < h$ (ii) $a = h$ (iii) $a > h$
   (iv) $a < c$ (v) $a = c$ (vi) $a > c$
   (b) Adakah terdapat kes berambiguiti?
5. Setiap kumpulan melantik seorang wakil untuk melakukan pembentangan di hadapan kelas.
6. Ahli daripada kumpulan yang lain boleh bertanyakan soalan kepada wakil kumpulan.
7. Guru akan membuat rumusan daripada pembentangan yang dilakukan.

ggbm.at/pyhdxwjg

Hasil daripada Inkuiri 2, terdapat tiga syarat kewujudan segi tiga seperti yang ditunjukkan dalam jadual yang berikut:

Tiada segi tiga wujud		$\boldsymbol{a < h}$
Satu segi tiga wujud	 $\boldsymbol{a = h}$	 $\boldsymbol{a \geqslant c}$
Dua segi tiga wujud	 $\boldsymbol{h < a < c}$	 $\boldsymbol{h < a < c}$

Kes berambiguiti wujud jika:

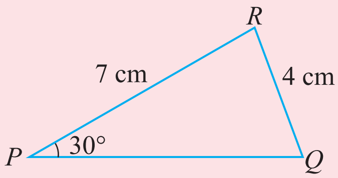
(a) Diberi panjang dua sisi, a dan c, serta satu sudut bukan kandung, $\angle A$ yang tirus.

(b) Sisi yang bertentangan dengan sudut bukan kandung, a lebih pendek daripada sisi yang satu lagi, c tetapi lebih panjang daripada tinggi segi tiga, h.

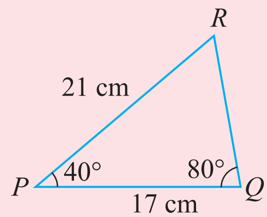
Contoh 4

Tentukan sama ada wujud kes berambiguiti bagi setiap segi tiga yang berikut dan jelaskan.

(a)

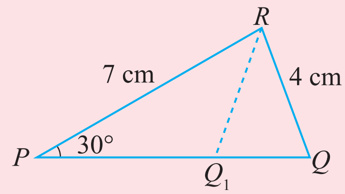


(b)



Penyelesaian

(a) Ya, wujud kes berambiguiti dalam segi tiga PQR dengan sudut bukan kandung $\angle QPR = 30°$ dan sisi RQ lebih pendek daripada sisi PR tetapi lebih panjang daripada tinggi segi tiga.



(b) Tidak wujud kes berambiguiti kerana dua sudut telah diberi.

Contoh 5

Dalam segi tiga ABC, $\angle BAC = 40°$, $AB = 20$ cm dan $BC = 14$ cm. Hitung nilai-nilai yang mungkin bagi $\angle C$ dan $\angle B$.

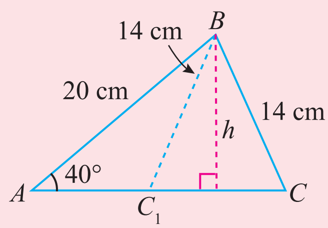
Penyelesaian

Tentukan sama ada wujud kes berambiguiti bagi segi tiga ABC.

Tinggi, $h = 20 \sin 40°$

$= 12.856$ cm

Oleh sebab $h < BC < AB$, maka wujud kes berambiguiti.



Perhatikan lakaran segi tiga ABC di sebelah. Dua segi tiga yang wujud ialah ABC dan ABC_1.

Bagi segi tiga ABC,

$$\frac{\sin \angle C}{20} = \frac{\sin 40°}{14}$$

$$\sin \angle C = \frac{20 \sin 40°}{14}$$

$$= 0.9183$$

$\angle C = 66.68°$ | $\angle C_1 = 180° - 66.68°$
$= 113.32°$

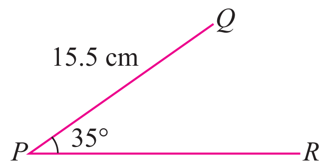
$\angle B = 180° - 40° - 66.68°$
$= 73.32°$

$\angle B_1 = 180° - 40° - 113.32°$
$= 26.68°$

Latih Diri 9.3

1. Bagi setiap segi tiga yang berikut, tentukan sama ada wujud kes berambiguiti atau tidak.
(a) ΔABC; $\angle B = 62.5°$, $BC = 14.5$ cm dan $AC = 10$ cm.
(b) ΔPQR; $\angle R = 28°$, $QR = 8.2$ cm dan $PQ = 11.4$ cm.

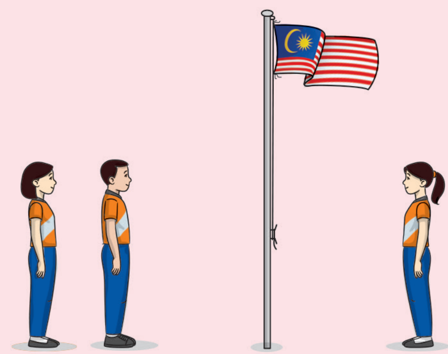
2. Rajah di sebelah menunjukkan segi tiga PQR yang tidak lengkap. $PQ = 15.5$ cm dan $\angle QPR = 35°$.
Diberi $QR = 10.5$ cm,
(a) cari nilai $\angle QRP$ yang mungkin,
(b) seterusnya, cari panjang yang mungkin bagi PR.



Menyelesaikan masalah berkaitan segi tiga menggunakan petua sinus

Contoh 6

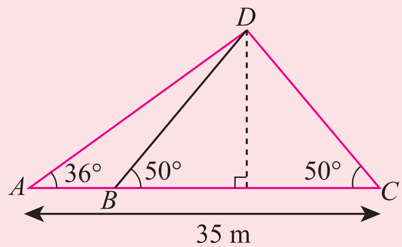
Azyan dan Christine berdiri menghadap sebatang tiang bendera seperti dalam rajah. Sudut dongak puncak bendera dari Azyan ialah 36° manakala sudut dongak puncak bendera dari Christine pula ialah 50°. Badrul berdiri di sebelah kiri tiang bendera dan sudut dongak puncak bendera darinya adalah sama dengan Christine. Jarak di antara Azyan dengan Christine ialah 35 m. Cari jarak di antara Azyan dengan Badrul jika tinggi bagi ketiga-tiga mereka adalah sama.



Penyelesaian

Wakilkan kedudukan Azyan, Badrul, Christine dan puncak bendera masing-masing sebagai A, B, C dan D.

$$\angle ADC = 180° - 50° - 36° = 94°$$
$$\angle BDC = 180° - 50° - 50° = 80°$$
$$\frac{DC}{\sin 36°} = \frac{35}{\sin 94°}$$
$$DC = \frac{35}{\sin 94°} \times \sin 36° = 20.6227 \text{ m}$$
$$\frac{BC}{\sin 80°} = \frac{20.6227}{\sin 50°}$$
$$BC = \frac{20.6227}{\sin 50°} \times \sin 80° = 26.5120 \text{ m}$$
$$AB = 35 \text{ m} - 26.5120 \text{ m} = 8.488 \text{ m}$$



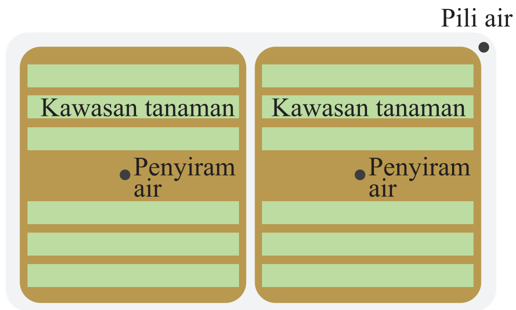
Maka, jarak di antara Azyan dengan Badrul ialah 8.488 m.

9.1.3 9.1.4 9.1.5

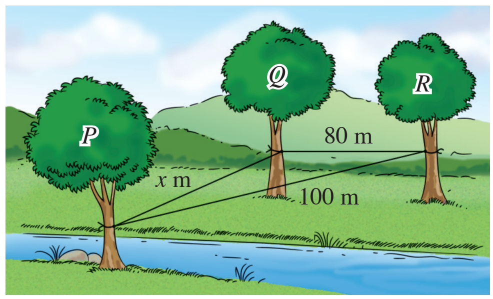
BAB 9

Latih Diri 9.4

1. Encik Samad membuat pelan bagi kawasan tanaman sayur-sayuran miliknya seperti dalam rajah. Encik Samad ingin meletakkan dua penyiram air di tengah-tengah kawasan tanaman. Pili yang akan mengawal penyiram air itu diletakkan di bucu kawasan tanaman. Jarak di antara dua penyiram air ialah 6 m dan jarak di antara pili air dengan penyiram air yang paling dekat ialah 5 m. Sudut yang terbentuk antara pili dengan kedua-dua penyiram air itu ialah 25°. Hitung jarak di antara pili dengan penyiram yang paling jauh.



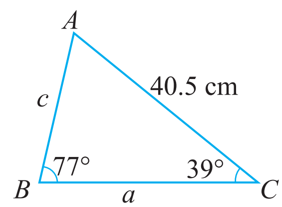
2. Sekumpulan ahli pengakap mengadakan aktiviti merentas sungai semasa kem jati diri. Mereka memasang tali dari pokok P ke pokok Q dan pokok R di seberang sungai seperti dalam rajah. Jarak di antara pokok Q dengan pokok R ialah 80 m dan sudut yang terbentuk antara pokok Q dengan pokok R di P ialah 50°. Cari nilai x, iaitu jarak dari pokok P ke pokok Q.



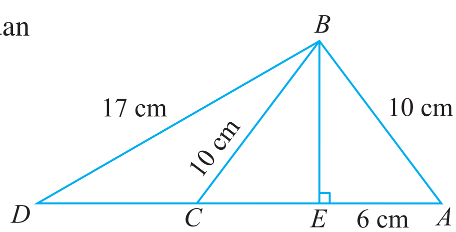
Latihan Intensif 9.1

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2ZmR2QN untuk kuiz

1. Rajah di sebelah menunjukkan segi tiga ABC dengan keadaan $\angle B = 77°$, $\angle C = 39°$ dan $AC = 40.5$ cm. Hitung nilai-nilai bagi $\angle A$, a dan c.



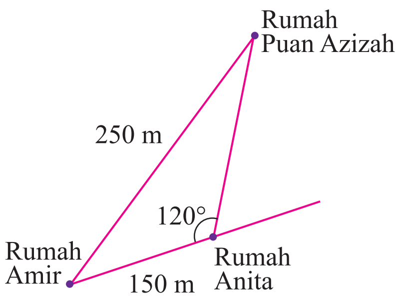
2. Rajah di sebelah menunjukkan segi tiga ABD. Titik C dan titik E terletak di atas garis lurus AD.
   (a) Cari panjang BE, CE dan DE.
   (b) Hitung $\angle EAB$, $\angle BCE$, $\angle BCD$, $\angle ABD$ dan $\angle CBD$.
   (c) Huraikan kes berambiguiti dalam rajah di sebelah.



3. Dalam segi tiga PQR yang bersudut cakah, $PR = 14$ cm, $QR = 6\sqrt{3}$ cm dan $\angle QPR = 40°$.
   (a) Nyatakan sudut cakah dan cari nilai sudut tersebut.
   (b) Hitung panjang PQ.

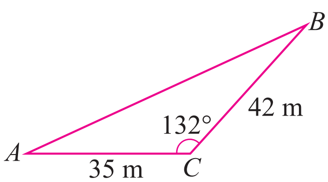
4. Rajah di sebelah menunjukkan bingkai gambar berbentuk segi empat sama yang digantung oleh Amira menggunakan dua utas tali. Amira mendapati bahawa bingkai gambar yang digantungkannya itu condong ke kanan. Sudut yang terbentuk antara tali yang lebih panjang dengan bingkai ialah 48°. Panjang tali yang disambung pada bingkai gambar masing-masing ialah 20 cm dan 15 cm. Hitung perimeter bingkai itu.

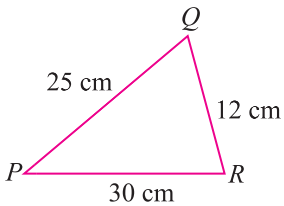
5. Rajah di sebelah menunjukkan kedudukan rumah Puan Azizah dan rumah dua orang anaknya, Amir dan Anita. Seorang lagi anaknya, Aida ingin membina rumah dengan keadaan ketiga-tiga rumah anak Puan Azizah adalah sebaris dan jarak dari rumah Aida dan rumah Anita ke rumah Puan Azizah adalah sama. Cari jarak di antara rumah Anita dengan rumah Aida.



9.2 Petua Kosinus

Perhatikan rajah-rajah di bawah.





Bagaimanakah cara mendapatkan panjang AB dan sudut PQR? Adakah kedua-dua segi tiga ini dapat diselesaikan menggunakan petua sinus?

Apabila diberi panjang dua sisi dan sudut kandung atau panjang tiga sisi, suatu segi tiga tidak boleh diselesaikan dengan menggunakan petua sinus. Segi tiga yang mempunyai syarat seperti ini boleh diselesaikan menggunakan petua kosinus.

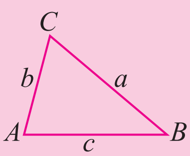
Petua Kosinus

Bagi sebarang segi tiga ABC,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ kos } A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{ kos } B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ kos } C$



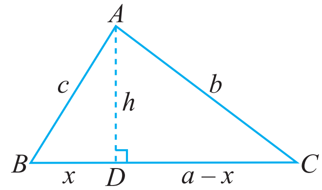
Mentahkikkan petua kosinus

Adakah petua kosinus benar untuk semua jenis segi tiga? Mari kita teroka.

Pertimbangkan segi tiga *ABC* di bawah. Dengan menggunakan teorem Pythagoras dalam segi tiga *ACD*,

$b^2 = h^2 + (a - x)^2$

$b^2 = h^2 + a^2 - 2ax + x^2 \quad \cdots ①$



Gunakan teorem Pythagoras dalam segi tiga *ABD*,

$c^2 = h^2 + x^2$

$h^2 = c^2 - x^2 \quad \cdots ②$

Gantikan ② ke dalam ①.

$b^2 = c^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ax \quad \cdots ③$

Dalam segi tiga *ABD*,

$\text{kos } B = \dfrac{x}{c}$

$x = c \text{ kos } B$

Gantikan $x = c$ kos B ke dalam ③.

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \text{ kos } B$

Persamaan ini ialah salah satu bentuk petua kosinus. Cuba anda tahkikkan petua kosinus bagi segi tiga bersudut cakah pula.

Cabar Minda

Adakah petua kosinus boleh digunakan pada segi tiga bersudut tegak? Jelaskan.

Menyelesaikan segi tiga melibatkan petua kosinus

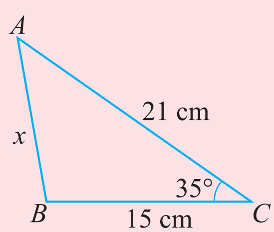
Petua kosinus boleh digunakan untuk mencari panjang atau sudut yang tidak diketahui dalam segi tiga apabila diberi panjang dua sisi dan sudut kandung atau panjang ketiga-tiga sisi.

Contoh 7

Dalam segi tiga *ABC*, *AC* = 21 cm, *BC* = 15 cm dan ∠*C* = 35°. Cari panjang *AB*.

Penyelesaian

Lakar segi tiga *ABC*.



Dengan menggunakan petua kosinus,

$x^2 = 15^2 + 21^2 - 2(15)(21) \text{ kos } 35°$

$= 225 + 441 - 630 \text{ kos } 35°$

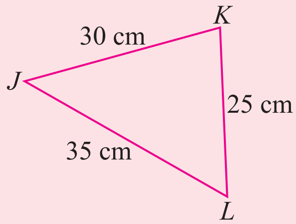
$= 149.9342$

Maka, $x = \sqrt{149.9342}$

$= 12.245$ cm

Contoh 8

Rajah di sebelah menunjukkan segi tiga JKL dengan panjang $JK = 30$ cm, $KL = 25$ cm dan $JL = 35$ cm. Cari nilai $\angle KJL$.



Penyelesaian

Dengan menggunakan petua kosinus,

$25^2 = 30^2 + 35^2 - 2(30)(35)$ kos $\angle KJL$

$$\text{kos } \angle KJL = \frac{30^2 + 35^2 - 25^2}{2(30)(35)}$$
$$= 0.7143$$
$$\angle KJL = 44.41°$$

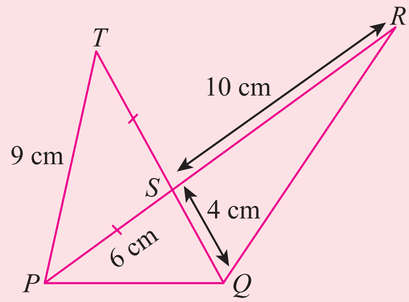
TIP PINTAR

Untuk mencari sudut, rumus petua kosinus boleh ditulis seperti berikut:

- $\text{kos } A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
- $\text{kos } B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
- $\text{kos } C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Contoh 9

Dalam rajah di sebelah, QST dan PSR ialah garis lurus. Cari panjang QR.



Penyelesaian

Dengan menggunakan petua kosinus,

$9^2 = 6^2 + 6^2 - 2(6)(6)$ kos $\angle PST$

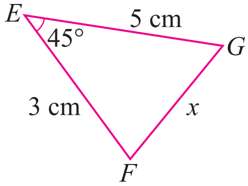
$$\text{kos } \angle PST = \frac{6^2 + 6^2 - 9^2}{2(6)(6)}$$
$$= -0.1250$$
$$\angle PST = 97.18°$$

$$QR^2 = 4^2 + 10^2 - 2(4)(10) \text{ kos } 97.18°$$
$$= 125.999$$
$$QR = 11.225 \text{ cm}$$

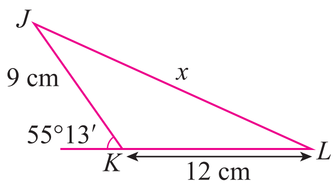
Latih Diri 9.5

1. Cari nilai x bagi setiap segi tiga yang berikut.

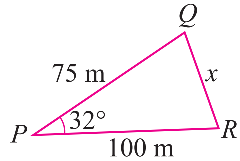
(a)



(b)

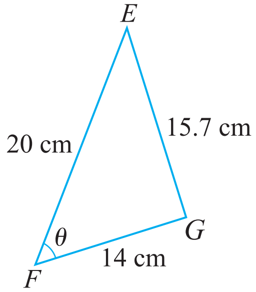


(c)

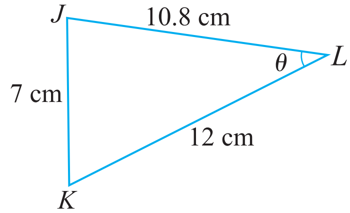


2. Cari nilai θ bagi setiap segi tiga yang berikut.

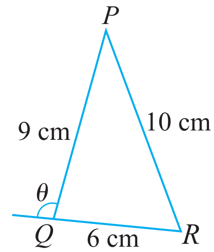
(a)



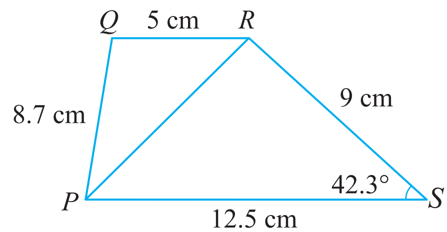
(b)



(c)



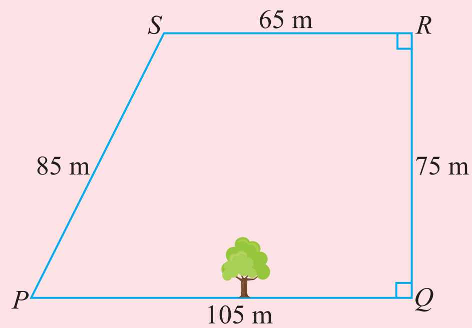
3. Rajah di sebelah menunjukkan sisi empat $PQRS$. Cari sudut PQR.



Menyelesaikan masalah melibatkan petua kosinus

Contoh 10

Encik Sivaraja mempunyai sebidang tanah berbentuk trapezium $PQRS$ seperti dalam rajah di sebelah. Dia telah memasang pagar di sekeliling kawasan tanahnya. Terdapat sebatang pokok yang berjarak 50 m dari bucu tanah Q. Encik Sivaraja ingin membahagikan tanah itu kepada dua bahagian dengan memasang pagar tambahan dari bucu tanah S hingga ke pokok. Hitung panjang pagar tambahan yang dipasang oleh Encik Sivaraja.



Penyelesaian

$SQ = \sqrt{65^2 + 75^2}$
$\quad = 99.2472$ m

$99.2472^2 = 85^2 + 105^2 - 2(85)(105) \text{ kos } \angle SPQ$

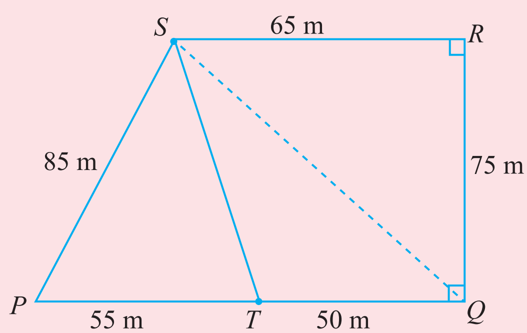
$$\text{kos } \angle SPQ = \frac{85^2 + 105^2 - 99.2472^2}{2(85)(105)}$$

$\angle SPQ = 61.93°$

$ST^2 = 55^2 + 85^2 - 2(55)(85) \text{ kos } 61.93°$
$\quad = 5850.3581$

$ST = 76.488$ m

Panjang pagar tambahan ialah 76.488 m.

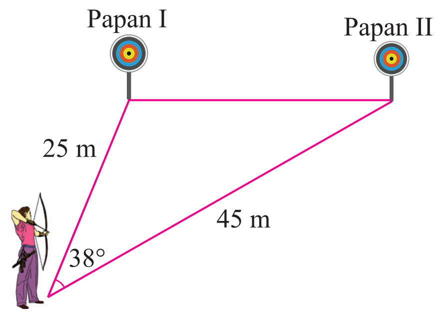


BAB 9

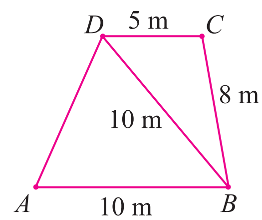
9.2.2 9.2.3

Latih Diri 9.6

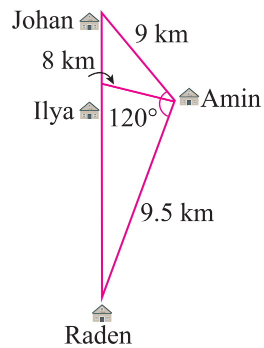
1. Farid menjalani latihan memanah di sebuah padang. Rajah di sebelah menunjukkan dua buah papan sasaran yang perlu dipanah oleh Farid. Jarak di antara Farid dengan papan I dan papan II masing-masing ialah 25 m dan 45 m. Kedudukan Farid mula memanah ialah 38° antara papan I dan papan II. Hitung jarak di antara papan I dengan papan II.



2. Frank memacakkan empat batang besi pada permukaan tanah dan memasang dawai untuk membina sebuah ampaian. Lakaran bagi ampaian yang dibina oleh Frank ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Dawai *AB* adalah selari dengan dawai *DC*. Hitung jumlah panjang dawai yang digunakan oleh Frank.



3. Rajah di sebelah menunjukkan kedudukan rumah empat orang rakan, iaitu Amin, Ilya, Johan dan Raden. Pada hari raya, Amin ingin menziarahi ketiga-tiga buah rumah rakannya itu. Amin bercadang untuk membawa Ilya dan kemudian menghantarnya semula sebelum pulang ke rumah. Berapakah jumlah jarak bagi keseluruhan perjalanan yang akan dilalui oleh Amin?

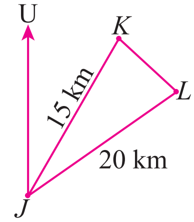


Latihan Intensif 9.2

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2SUta4H untuk kuiz

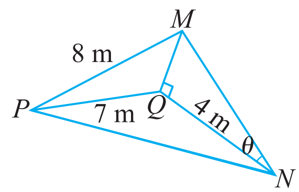
1. Sekeping kad berbentuk segi empat selari. Diberi panjang dua pepenjuru kad itu masing-masing ialah 6 cm dan 9 cm. Sudut tirus antara pepenjuru kad ialah 62°. Hitung panjang sisi-sisi kad itu.

2. Rajah di sebelah menunjukkan kedudukan tiga buah bandar, *J*, *K* dan *L*. Diberi bearing *K* dari *J* ialah 020° dan bearing *L* dari *J* ialah 055°, cari jarak di antara bandar *K* dan bandar *L*.



3. Kapal Bunga Raya meninggalkan sebuah pelabuhan dan belayar ke arah timur sejauh 28 km. Kapal Bunga Orkid pula meninggalkan pelabuhan yang sama dan belayar sejauh 49 km. Jika jarak akhir di antara kedua-dua buah kapal itu ialah 36 km, cari sudut antara laluan kapal Bunga Raya dengan laluan kapal Bunga Orkid.

4. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah kolam berbentuk segi tiga MNP. Diberi kos $\theta = \frac{4}{5}$, MP = 8 m, PQ = 7 m dan QN = 4 m. Encik Raja memasang batu di sekeliling kolam itu. Hitung panjang batu di sekeliling kolam yang dipasang oleh Encik Raja.

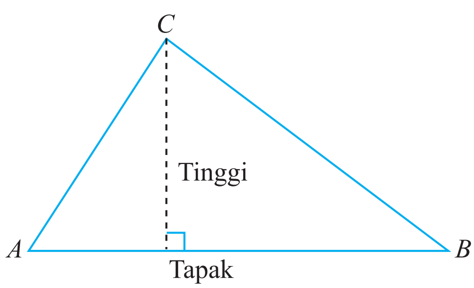


9.3 Luas Segi Tiga

Menerbitkan rumus dan menentukan luas segi tiga

Gambar di sebelah menunjukkan reka bentuk tingkap berbentuk segi tiga di sebuah bangunan. Apakah maklumat yang diperlukan untuk menghitung luas tingkap dalam gambar ini dan apakah rumus yang akan anda gunakan untuk mendapatkan luas tingkap tersebut?

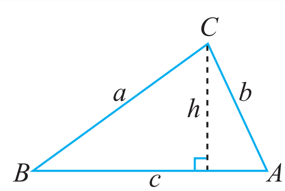
Anda telah mempelajari bahawa luas bagi segi tiga dapat dicari menggunakan rumus berikut:



$$\text{Luas} = \frac{1}{2} \times \text{tapak} \times \text{tinggi}$$

Rumus bagi luas segi tiga ini boleh digunakan apabila ukuran tapak dan tinggi segi tiga diberi. Bagaimanakah cara mencari luas bagi segi tiga tanpa mengetahui ukuran tapak dan tinggi? Mari kita teroka cara untuk menerbitkan rumus bagi luas segi tiga.

IMBAS KEMBALI



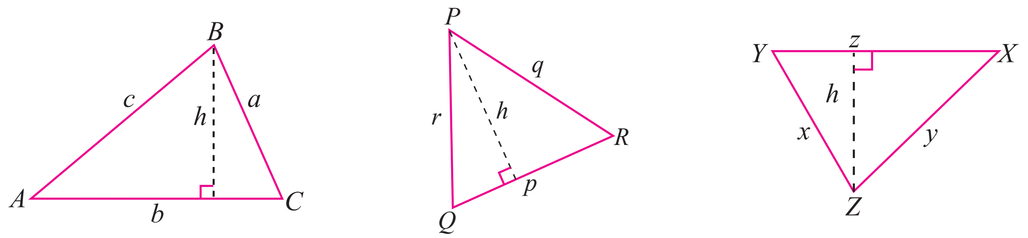
$h = a \sin B$
$h = b \sin A$

INKUIRI 3 **Berkumpulan** **PAK-21**

Tujuan: Menerbitkan rumus luas segi tiga

Arahan:

1. Mulakan aktiviti ini secara berpasangan.
2. Perhatikan ketiga-tiga bentuk segi tiga yang berikut.



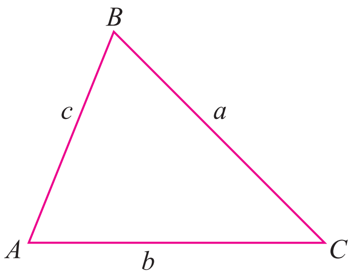
Segi tiga I　　Segi tiga II　　Segi tiga III

3. Cari tinggi bagi setiap segi tiga berikut menggunakan nisbah trigonometri.
4. Kemudian, salin dan lengkapkan jadual yang berikut berdasarkan segi tiga di atas secara berpasangan.

Segi tiga	Tapak	Tinggi	Luas
I	AC		
II			
III			

5. Bandingkan rumus luas yang diperoleh bagi ketiga-tiga segi tiga itu dan nyatakan kesimpulan daripada hasil dapatan anda.
6. Bentukkan beberapa kumpulan. Kemudian, setiap pasangan akan berkongsi hasil dapatan dan kesimpulan dalam kumpulan masing-masing.

Daripada Inkuiri 3, jika sebuah segi tiga hanya diberi dua panjang sisi dan satu sudut kandung, luas bagi segi tiga itu boleh dihitung menggunakan rumus yang berikut:



$$\begin{aligned}\text{Luas} &= \frac{1}{2}ab \sin C\\ &= \frac{1}{2}ac \sin B\\ &= \frac{1}{2}bc \sin A\end{aligned}$$

QR

Kaedah menerbitkan rumus luas segi tiga.

bit.ly/2DNzwfU

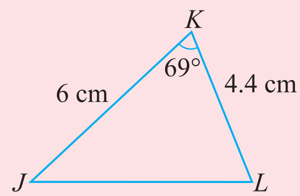
BAB 9

9.3.1

Contoh 11

Cari luas segi tiga JKL dalam rajah di sebelah.

Penyelesaian



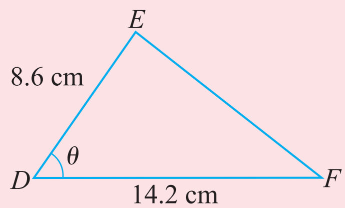
Sudut kandung = 69°

$$\text{Luas} = \frac{1}{2}(6)(4.4) \sin 69°$$
$$= 12.323 \text{ cm}^2$$

Contoh 12

Luas sebuah segi tiga DEF ialah 50 cm^2. Diberi $DE = 8.6$ cm, $DF = 14.2$ cm dan $\angle EDF = \theta$, cari nilai θ.

Penyelesaian

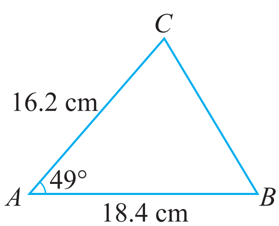


$$\frac{1}{2}(8.6)(14.2) \sin \theta = 50$$
$$\sin \theta = \frac{50}{61.06}$$
$$\theta = 54.97°$$

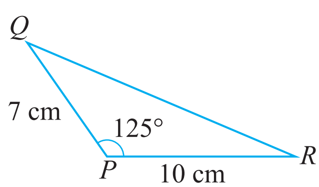
Latih Diri 9.7

1. Cari luas bagi setiap segi tiga yang berikut.

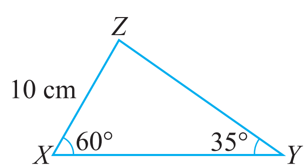
(a)



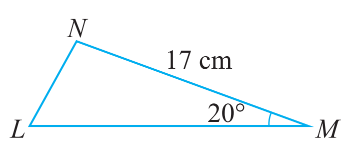
(b)



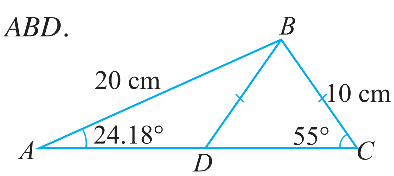
(c)



2. Dalam rajah di sebelah, luas segi tiga LMN ialah 78.72 cm^2. Cari panjang LM.



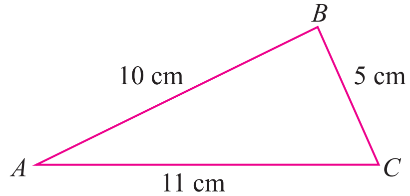
3. Rajah di sebelah menunjukkan segi tiga BCD dan segi tiga ABD. Cari luas segi tiga ABD.



4. Cari luas segi tiga XYZ, diberi $x = 5.5$ m, $z = 7$ m dan $\angle Y = 70°30'$.

Menentukan luas segi tiga menggunakan rumus Heron

Pertimbangkan segi tiga *ABC* yang berikut:



Apabila segi tiga hanya diberi panjang bagi setiap sisi, luas bagi segi tiga itu boleh dicari dengan menggunakan rumus Heron. Langkah penyelesaiannya adalah seperti berikut:

Langkah 1

Hitung semiperimeter, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, dengan a, b dan c ialah panjang sisi segi tiga.

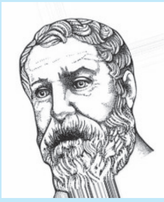
Langkah 2

Gantikan nilai s, a, b dan c ke dalam rumus yang berikut:

$$\text{luas} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

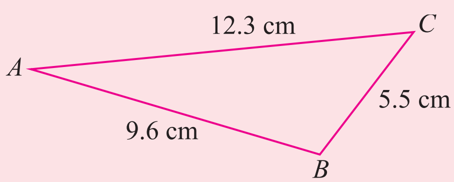
Muzium Matematik

Hero of Alexandria atau dikenali sebagai Heron ialah seorang ahli matematik dari Yunani. Rumus Heron diambil sempena nama beliau dan terdapat dalam buku yang dihasilkan oleh beliau bertajuk "Metrica".



Contoh 13

Cari luas segi tiga di bawah.



Penyelesaian

$$s = \frac{5.5 + 9.6 + 12.3}{2}$$
$$= 13.7$$
$$\text{Luas} = \sqrt{13.7(13.7-5.5)(13.7-9.6)(13.7-12.3)}$$
$$= 25.39 \text{ cm}^2$$

QR

Pembuktian rumus Heron.

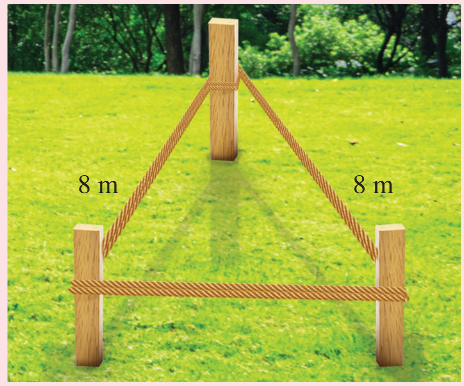
bit.ly/2WpgHqD

BAB 9

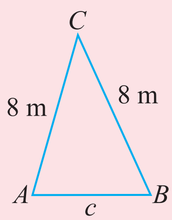
9.3.2

Contoh 14

Sekumpulan pengakap memacak tiga batang kayu di suatu kawasan perkhemahan untuk membina unggun api. Seutas tali yang panjangnya 22 m diikat mengelilingi kayu-kayu itu seperti dalam rajah. Tali yang diikat itu membentuk segi tiga sama kaki. Panjang tali pada sisi yang sama ialah 8 m. Cari luas kawasan untuk mereka membina unggun api.



Penyelesaian



Diberi perimeter segi tiga = 22 m, a = 8 m, b = 8 m.

$c = 22 - 8 - 8$
$\quad = 6$ m

$s = \dfrac{22}{2}$
$\quad = 11$

Luas = $\sqrt{11(11-8)(11-8)(11-6)}$
$\quad = 22.249$ m^2

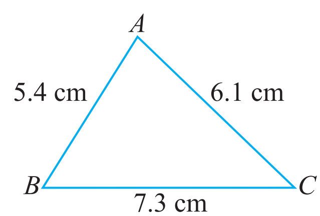
Maka, luas kawasan untuk membina unggun api ialah 22.249 m^2.

Kaedah Alternatif

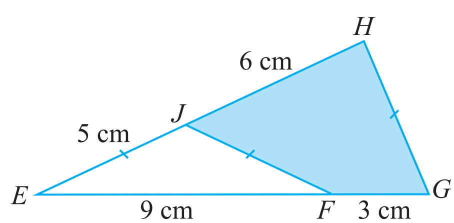
$6^2 = 8^2 + 8^2 - 2(8)(8)\text{kos}\angle ACB$
$\angle ACB = 44.05°$
Luas $= \frac{1}{2}(8)(8)\sin 44.05°$
$\quad = 22.249$ m^2

Latih Diri 9.8

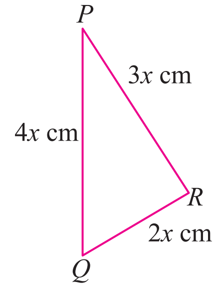
1. Rajah di sebelah menunjukkan segi tiga ABC dengan keadaan AB = 5.4 cm, AC = 6.1 cm dan BC = 7.3 cm. Hitung luas, dalam cm^2, segi tiga ABC.



2. Rajah di sebelah menunjukkan dua segi tiga, EFJ dan EGH. EFG dan EJH ialah garis lurus. Hitung luas, dalam cm^2, kawasan berlorek.



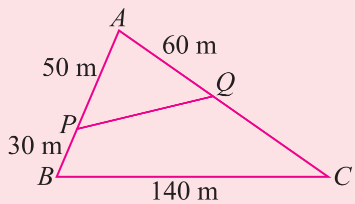
3. Encik Sammy ingin mengecat dinding biliknya. Dia melukis satu bentuk segi tiga pada dinding dan akan mengecat bentuk segi tiga itu menggunakan cat hijau. Bentuk segi tiga itu ditunjukkan seperti rajah di sebelah. Panjang sisi segi tiga itu masing-masing ialah $2x$ cm, $3x$ cm dan $4x$ cm. Luasnya pula ialah $\sqrt{135}$ cm². Cari nilai x.



Menyelesaikan masalah melibatkan luas segi tiga

Contoh 15

Rajah di sebelah menunjukkan pelan sebuah tanah pertanian berbentuk segi tiga ABC milik Encik Munzir. Bahagian tanah APQ akan ditanam dengan cili dan bahagian tanah selebihnya akan ditanam dengan kubis. Diberi $AP = 50$ m, $AQ = 60$ m, $AB = 80$ m, $AC = 130$ m dan $BC = 140$ m, cari luas kawasan tanah yang akan ditanam dengan kubis.



Penyelesaian

Anggap L_1 sebagai luas segi tiga ABC dan L_2 sebagai luas segi tiga APQ.

Gunakan rumus Heron untuk mencari L_1.

$$s = \frac{80 + 130 + 140}{2}$$
$$= 175$$
$$L_1 = \sqrt{175(175 - 80)(175 - 130)(175 - 140)}$$
$$= 5117.0670 \text{ m}^2$$

Gunakan rumus luas $= \frac{1}{2}bc \sin A$ untuk mendapatkan $\angle BAC$.

$$\frac{1}{2}(80)(130) \sin \angle BAC = 5117.0670$$
$$\sin \angle BAC = \frac{5117.0670}{\frac{1}{2}(80)(130)}$$
$$\angle BAC = 79.75°$$

Kaedah Alternatif

$$\text{kos } A = \frac{80^2 + 130^2 - 140^2}{2(80)(130)}$$
$$A = 79.75°$$

Gunakan rumus luas $= \frac{1}{2}pq \sin A$ untuk mencari L_2.

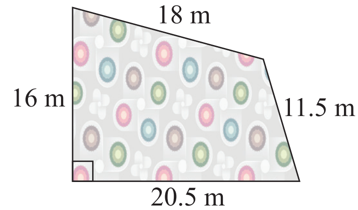
$$L_2 = \frac{1}{2}(60)(50) \sin 79.75°$$
$$= 1476.0610 \text{ m}^2$$

Maka, luas kawasan yang akan ditanam dengan kubis $= L_1 - L_2$
$= 5117.0670 - 1476.0610$
$= 3641.006$ m²

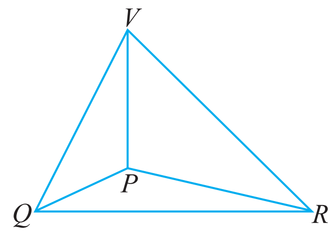
9.3.2 9.3.3

Latih Diri 9.9

1. Encik Khan mendapat tender untuk memasang permaidani di sebuah pejabat. Hitung luas permaidani yang perlu dipasang untuk ruang pejabat seperti dalam rajah di sebelah.



2. Rajah di sebelah menunjukkan perhiasan berbentuk piramid. Perhiasan itu mempunyai tapak berbentuk segi tiga PQR. Bucu V terletak tegak di atas bucu P. Diberi $PQ = 4$ cm, $PV = 10$ cm, $VR = 15$ cm dan $\angle VQR = 80°$, hitung luas permukaan condong perhiasan itu.



Latihan Intensif 9.3

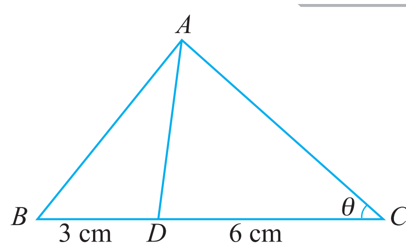
Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2GC1o8b untuk kuiz

1. Rajah di sebelah menunjukkan segi tiga ABC.

   Diberi luas segi tiga $ABC = 18$ cm^2 dan $\sin \theta = \frac{2}{3}$, cari

   (a) panjang AC,

   (b) luas segi tiga ABD.

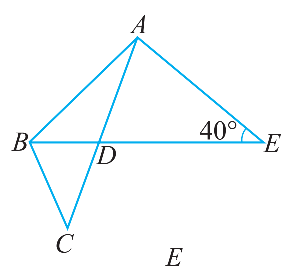


2. Sebuah pentagon sekata mempunyai panjang sisi 5 cm. Cari luas pentagon sekata itu.

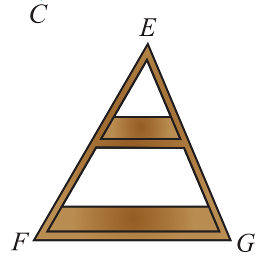
3. Mei Ling ingin menyediakan kad ucapan berbentuk segi tiga. Luas kad itu ialah 30 cm^2 dan dua panjang sisinya ialah 8 cm dan 11 cm. Cari ukuran panjang yang mungkin bagi sisi yang ketiga.

4. Panjang sisi sebuah segi tiga ialah $3x$ cm, $(x – 1)$ cm dan $(3x + 1)$ cm. Diberi bahawa perimeter segi tiga itu ialah 63 cm. Hitung luas, dalam cm^2, segi tiga tersebut.

5. Pooja memagar sebidang tanah berbentuk seperti dalam rajah di sebelah. Diberi $BD = 5$ m, $BC = 7$ m, $CD = 8$ m dan $AE = 12$ m. BDE dan ADC ialah garis lurus. Hitung luas tanah yang dipagari oleh Pooja.



6. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah rak perhiasan dinding berbentuk segi tiga EFG. Diberi $FG = 15$ cm, $EG = 16$ cm dan $EF = 17$ cm, cari tinggi rak perhiasan dinding itu.



BAB 9

9.4 Aplikasi Petua Sinus, Petua Kosinus dan Luas Segi Tiga

Menyelesaikan masalah yang melibatkan segi tiga

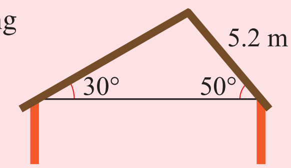
Contoh 16

APLIKASI MATEMATIK

Encik Tan bercadang untuk mengecat bahagian bumbung garaj keretanya. Rajah di sebelah ialah lakaran pandangan hadapan bumbung garaj itu. Dia mendapati panjang kayu di satu bahagian bumbung lebih panjang daripada kayu di bahagian bumbung yang satu lagi.

(a) Hitung panjang kayu pada bahagian bumbung yang lebih panjang dan jarak di antara kedua-dua dinding garaj.

(b) Berapakah luas bahagian hadapan bumbung garaj berbentuk segi tiga, dalam m^2, yang akan dicat oleh Encik Tan?



Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Panjang satu sisi bumbung = 5.2 m.
- Dua sudut diberi, iaitu 30° dan 50°.
- Nilai yang perlu dicari ialah panjang dua sisi segi tiga, jarak di antara dua dinding garaj dan luas segi tiga.

2. Merancang strategi

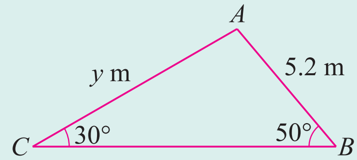
- Lukis segi tiga ABC yang mewakili pandangan hadapan bumbung garaj kereta.
- Panjang satu bahagian bumbung, $AC = y$ dihitung menggunakan petua sinus.
- Tentukan $\angle BAC$ dan seterusnya hitung BC menggunakan petua kosinus.
- Cari luas segi tiga ABC menggunakan rumus:

$$\text{Luas} = \frac{1}{2}ab \sin C$$

atau rumus Heron.

3. Melaksanakan strategi

(a)



Dengan menggunakan petua sinus,

$$\frac{y}{\sin 50°} = \frac{5.2}{\sin 30°}$$

$$y = \frac{5.2}{\sin 30°} \times \sin 50°$$

$$= 7.967 \text{ m}$$

Maka, panjang bahagian bumbung yang satu lagi ialah 7.967 m.

$$\angle BAC = 180° - 30° - 50°$$
$$= 100°$$

Dengan menggunakan petua kosinus,

$$BC^2 = 5.2^2 + 7.967^2 - 2(5.2)(7.967) \text{ kos } 100°$$

$$BC = 10.24 \text{ m}$$

Maka, jarak di antara kedua-dua dinding garaj ialah 10.24 m.

(b) Luas segi tiga ABC

$$= \frac{1}{2}(5.2)(10.24) \sin 50°$$

$$= 20.40 \text{ m}^2$$

Maka, luas bahagian segi tiga yang akan dicat oleh Encik Tan ialah 20.40 m^2.

4. Membuat refleksi

Menggunakan rumus Heron,

$s = \dfrac{5.2 + 7.967 + 10.24}{2} = 11.7035$ m

Luas

$= \sqrt{11.7035(11.7035 - 5.2)(11.7035 - 7.967)(11.7035 - 10.24)}$

≈ 20.40 m^2

Nilai *AC*, *BC* dan luas yang dicari adalah sah.

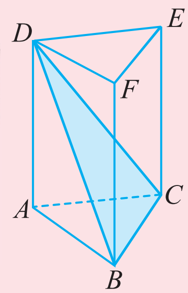
Contoh 17

Rajah di sebelah menunjukkan sebuah prisma kaca dan lakaran bagi prisma itu. Keratan rentas prisma itu berbentuk segi tiga sama sisi yang berukuran 6 cm setiap sisi dan tinggi prisma itu ialah 8 cm. Hitung

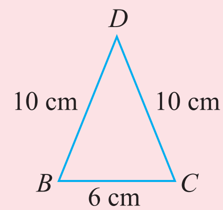
(a) sudut antara *BD* dengan *CD*,

(b) luas segi tiga *BCD*,

(c) sudut antara satah *BCD* dengan satah tegak *BCEF*.



Penyelesaian



(a) $CD = \sqrt{6^2 + 8^2}$

$= 10$ cm

$6^2 = 10^2 + 10^2 - 2(10)(10) \text{ kos } \angle BDC$

$\text{kos } \angle BDC = \dfrac{10^2 + 10^2 - 6^2}{2(10)(10)}$

$\angle BDC = 34.92°$

Maka, sudut antara *BD* dengan *CD* ialah 34.92°.

(b) Luas segi tiga $BCD = \dfrac{1}{2}(10)(10) \sin 34.92°$

$= 28.622$ cm^2

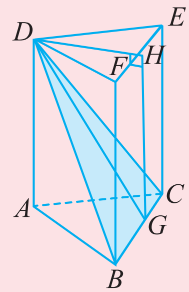
(c) Berdasarkan rajah di sebelah, sudut antara satah *BCD* dengan satah tegak *BCEF* ialah $\angle DGH$.

$DH = \sqrt{6^2 - 3^2}$

$= 5.1962$

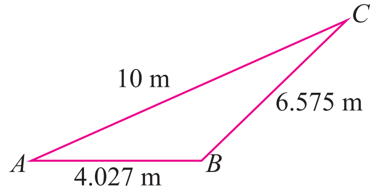
$\tan \angle DGH = \dfrac{5.1962}{8}$

$\angle DGH = 33°$

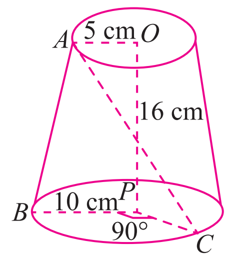


Latih Diri 9.10

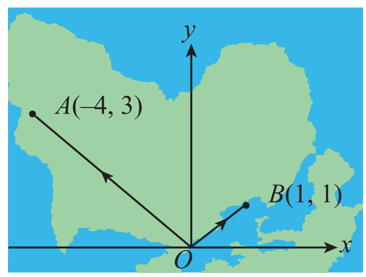
1. Di dalam sebuah dewan peperiksaan, meja Daniel, Darvin dan Cindy masing-masing berada pada kedudukan A, B dan C yang membentuk segi tiga seperti rajah di sebelah. Jarak di antara meja Daniel dengan Cindy ialah 10 m, meja Daniel dengan Darvin ialah 4.027 m manakala meja Darvin dengan Cindy ialah 6.575 m. Buktikan bahawa jumlah sudut pedalaman bagi segi tiga yang terbentuk ialah 180°.



2. Rajah di sebelah menunjukkan alat permainan kanak-kanak berbentuk kon yang dipotong di bahagian atas. Permukaan berbentuk bulatan, pusat O dan pusat P adalah mengufuk dan paksi OP adalah tegak. Terdapat satu garis lurus yang menyambungkan A kepada C. Diberi $OA = 5$ cm, $PB = 10$ cm, $OP = 16$ cm dan $\angle BPC = 90°$, hitung
   (a) panjang AC,
   (b) luas satah ABC.



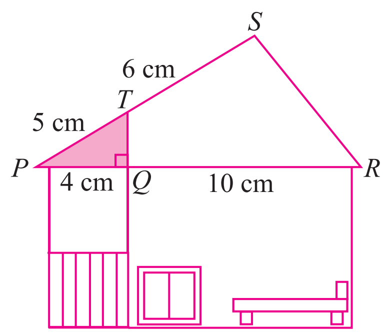
3. Kedudukan dua buah bandar, A dan B ditunjukkan di atas satah Cartes dalam rajah di sebelah. Cari sudut antara vektor kedudukan bandar A dan bandar B relatif kepada asalan O. Seterusnya, cari luas bagi rantau berbentuk segi tiga OAB.



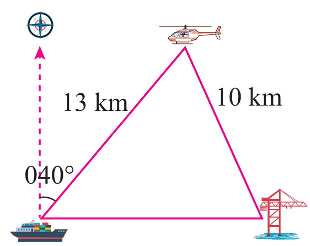
Latihan Intensif 9.4

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2FhZgn2 untuk kuiz

1. Rajah di sebelah menunjukkan pandangan hadapan sebuah rumah anak patung yang dibina oleh Melly. Bahagian yang berwarna ialah bumbung beranda rumah anak patung itu. PTS dan PQR ialah garis lurus.
   (a) Hitung luas kawasan bumbung $QRST$.
   (b) Terdapat satu titik U yang terletak pada PR dengan keadaan $SU = SR$, hitung $\angle SUP$.



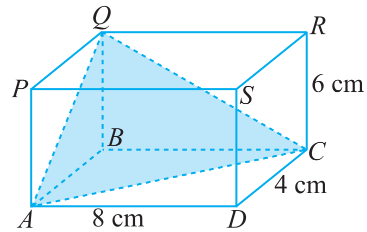
2. Rajah di sebelah menunjukkan kedudukan sebuah pelantar minyak, sebuah kapal tangki dan sebuah helikopter. Bearing helikopter dari kapal tangki ialah 40°. Diberi jarak di antara helikopter dengan kapal tangki ialah 13 km manakala jarak di antara helikopter dengan pelantar minyak ialah 10 km. Hitung jarak, dalam km, di antara kapal tangki dengan pelantar minyak.



9.4.1

BAB 9

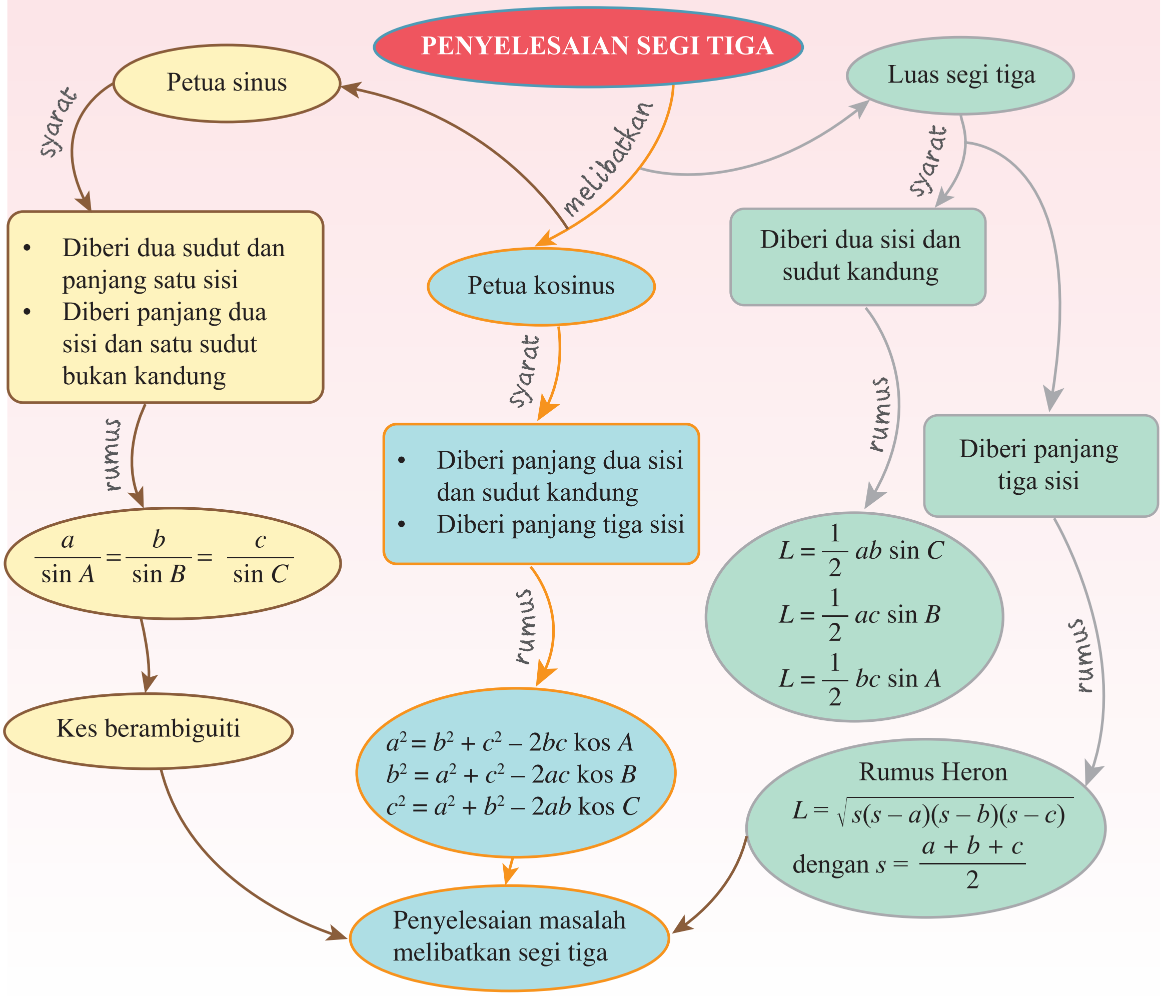
3. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah kotak hadiah berbentuk kuboid.
(a) Hitung luas satah ACQ.
(b) Seterusnya, nyatakan satu lagi satah yang mempunyai luas yang sama dengan satah ACQ.



4. Sebuah kapal belayar sejauh 20 km ke pelabuhan Bentara pada bearing 120° dari pelabuhan Astaka. Kemudian, kapal itu belayar sejauh 30 km ke pelabuhan Cindai pada bearing 225° dari pelabuhan Bentara. Hitung jarak dan bearing pelabuhan Cindai dari pelabuhan Astaka.

5. Sudut dongak puncak sebuah gunung dari Arman ialah 20°. Arman kemudian berjalan secara mengufuk ke arah gunung itu sejauh 800 m dan sudut dongaknya menjadi 45°. Anggarkan tinggi gunung itu dari aras Arman berada.

RUMUSAN BAB 9

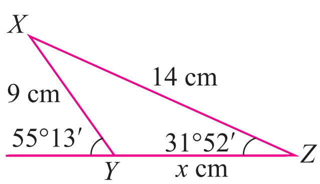


TULIS JURNAL ANDA

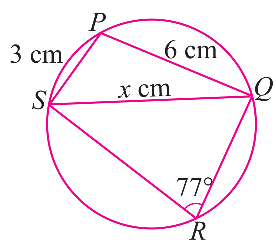
1. Lukis carta alir yang menunjukkan langkah-langkah yang anda gunakan untuk memilih petua yang sesuai digunakan bagi mencari
   (a) panjang sisi atau saiz sudut sebuah segi tiga,
   (b) luas sebuah segi tiga.
2. Layari Internet untuk mendapatkan
   (a) contoh-contoh penggunaan petua sinus, petua kosinus dan rumus luas segi tiga dalam kehidupan seharian,
   (b) luas Segi Tiga Emas Kuala Lumpur, Segi Tiga Emas India dan Segi Tiga Bermuda.

LATIHAN PENGUKUHAN

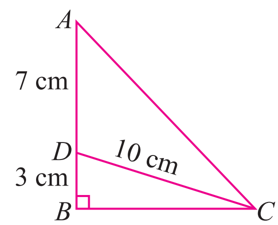
1. (a) Diberi $\angle ABC = 50°$, $\angle BAC = 72°$ dan $c = 5.8$ cm, hitung panjang a dan b. TP1
   (b) Diberi sisi-sisi segi tiga PQR ialah $p = 8.28$ cm, $q = 6.56$ cm dan $r = 3.63$ cm, cari $\angle P$, $\angle Q$ dan $\angle R$. TP2
2. Cari nilai x dalam setiap rajah berikut. TP3
   (a)



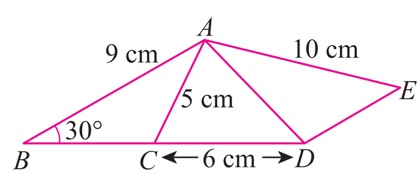
   (b)



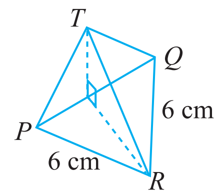
3. Rajah di sebelah menunjukkan segi tiga bersudut tegak ABC. Titik D terletak di atas AB. Hitung TP3
   (a) panjang AC,
   (b) luas segi tiga ADC.



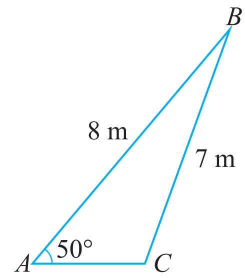
4. Diberi segi tiga XYZ dengan keadaan $\angle X = 42.2°$, $x = 10$ cm dan $z = 13.4$ cm. TP4
   (a) Lakarkan dua bentuk segi tiga yang mungkin.
   (b) Seterusnya cari $\angle Z$ yang mungkin.
   (c) Hitung luas segi tiga XYZ untuk $\angle Z$ yang cakah.
5. Rajah di sebelah menunjukkan lima titik, A, B, C, D dan E yang membentuk sisi empat. BCD ialah garis lurus, $\angle ACB$ adalah cakah dan luas segi tiga ADE ialah 20 cm². Hitung TP4
   (a) panjang AD,
   (b) $\angle DAE$.



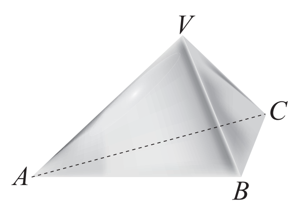
6. Dalam rajah di sebelah, PQR ialah segi tiga sama sisi yang mengufuk dengan panjang sisi 6 cm. Titik T ialah 4 cm tegak di atas titik tengah PQ. Hitung TP5
   (a) sudut yang terbentuk oleh TR dengan segi tiga PQR,
   (b) luas satah TPR.



7. Sekumpulan pasukan pandu puteri sekolah menyertai suatu perkhemahan. Mereka memasang tiga buah khemah dengan kedudukannya seperti dalam rajah di sebelah. Kedudukan ketiga-tiga buah khemah itu membentuk segi tiga ABC. TP5
   (a) Hitung sudut cakah ACB.
   (b) Lakar dan labelkan satu lagi segi tiga selain segi tiga ABC yang menunjukkan kedudukan yang mungkin bagi khemah C dengan keadaan jarak AB dan AC serta $\angle ABC$ dikekalkan.
   (c) Khemah C perlu dialihkan ke tempat yang lain tetapi jarak antara khemah A dengan khemah B serta sudut BAC yang terbentuk antara khemah tidak berubah. Hitung jarak AC supaya hanya satu segi tiga yang terbentuk.

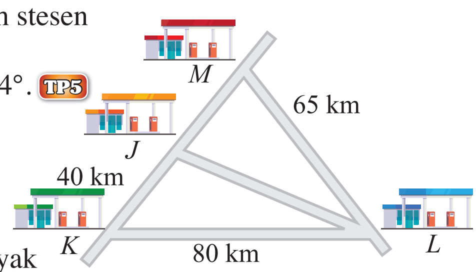


8. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah bongkah kaca berbentuk piramid $VABC$. Tapak bongkah itu berbentuk segi tiga sama kaki dengan $AB = AC = 5.2$ cm. V ialah puncak bongkah dengan keadaan $BV = CV = 3$ cm. Sudut antara satah condong VBC dengan tapak ABC ialah 50°. Hitung TP5
   (a) $\angle BAC$, diberi luas tapak ialah 8.69 cm^2,
   (b) panjang AV, diberi sudut antara garis AV dengan tapak ialah 25°,
   (c) luas permukaan VAB bongkah kaca itu.



9. Rashid memandu sebuah bot ke arah barat. Dia melihat sebuah rumah api sejauh 25 km pada bearing 235°. TP5
   (a) Lakarkan rajah untuk menggambarkan situasi ini.
   (b) Berapakah jarak yang telah dilalui oleh bot itu jika jaraknya dari rumah api ialah 16 km?
   (c) Rashid meneruskan pemanduannya sehingga jaraknya dari rumah api sekali lagi ialah 16 km.
      (i) Hitung jarak di antara kedudukan pertama dengan kedudukan kedua bot itu.
      (ii) Apakah bearing rumah api dari bot itu pada kedudukan yang kedua?

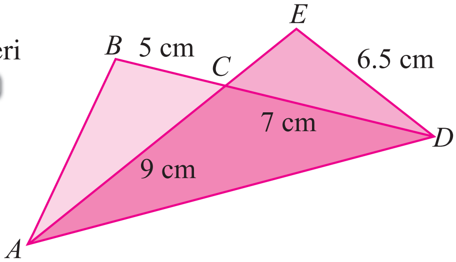
10. Rajah di sebelah menunjukkan kedudukan empat buah stesen minyak, J, K, L dan M di sebuah daerah. Diberi jarak $JK = 40$ km, $KL = 80$ km, $LM = 65$ km dan $\angle JKL = 44°$. TP5
   (a) Hitung
      (i) jarak JL,
      (ii) $\angle JML$,
      (iii) luas kawasan KLM.
   (b) Tanpa melakukan pengiraan, tentukan stesen minyak yang paling jauh dari stesen minyak K. Jelaskan.
   (c) Jika sebuah kereta bergerak di sepanjang jalan KL, hitung jarak terdekat kereta itu dari stesen minyak M.



11. Mary mewarnakan tiga segi tiga ABC, ACD dan CED dengan keadaan ACE dan BCD adalah garis lurus. Diberi bahawa $\angle DCE = 50.05°$ dan $\angle CED$ adalah cakah. TP6

(a) Hitung
  (i) $\angle CED$,
  (ii) panjang AB,
  (iii) luas segi tiga AED.

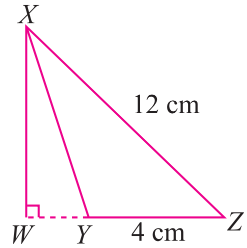
(b) Garis lurus AB dipanjangkan ke titik B' dengan keadaan $CB' = CB$. Pada rajah yang sama, lukis dan warnakan segi tiga BCB'.



12. Dalam rajah di sebelah, WYZ ialah garis lurus.

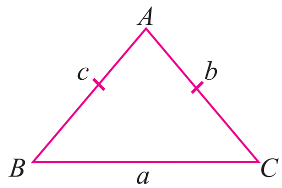
Diberi $\sin \angle XYW = \dfrac{10}{11}$. TP6

(a) Cari $\sin \angle YXZ$.
(b) Hitung luas segi tiga XYZ. Seterusnya, cari panjang XW.
(c) Nyatakan dua keadaan supaya segi tiga di sebelah boleh dikaitkan dengan kes berambiguiti.



Penerokaan MATEMATIK

Anda diberi segulung dawai yang panjangnya 100 meter. Anda dikehendaki memagar suatu kawasan berbentuk segi tiga sama kaki. Rajah di sebelah menunjukkan lakaran kawasan berbentuk segi tiga itu.



(a) Lengkapkan jadual yang berikut untuk mencari ukuran panjang sisi segi tiga, a, b dan c, yang mungkin boleh dibentuk dengan menggunakan dawai itu.

a	b	c	Luas segi tiga
2	49	49	
4	48	48	

(b) Dengan menggunakan rumus dan teknologi yang sesuai, hitung luas bagi setiap segi tiga itu.
(c) Seterusnya, ramalkan luas maksimum kawasan yang dapat dipagari dan nyatakan bentuk segi tiga itu.

BAB 9

BAB 10

Nombor Indeks

Apakah yang akan dipelajari?

- Nombor Indeks
- Indeks Gubahan

Senarai Standard Pembelajaran

bit.ly/2An872N

KATA KUNCI

Nombor indeks	*Index number*
Indeks harga	*Price index*
Kuantiti pada masa asas	*Quantity at base time*
Kuantiti pada masa tertentu	*Quantity at specific time*
Indeks gubahan	*Composite index*
Pemberat	*Weightage*

Indeks Harga Pengguna (IHP) mengukur perubahan harga barangan dan perkhidmatan yang mewakili corak purata pembelian oleh sekumpulan penduduk pada tempoh masa yang ditetapkan. IHP juga digunakan untuk mengira kadar inflasi dan kos sara hidup. Selain makanan dan minuman, apakah barangan dan perkhidmatan lain yang dibeli oleh isi rumah di Malaysia?

Tahukah Anda?

Pada tahun 1764, Giovanni Rinaldo Carli (1720-1795) yang merupakan ahli ekonomi Itali telah mengira nisbah harga bagi tiga barangan untuk tahun 1500 hingga tahun 1750. Purata bagi tiga nisbah harga ini merupakan ukuran perubahan harga yang telah berlaku dalam tempoh 250 tahun. Idea beliau telah menyebabkan nombor indeks digunakan secara meluas sehingga hari ini.

Untuk maklumat lanjut:

bit.ly/2DGd0W6

SIGNIFIKAN BAB INI

Secara amnya, nombor indeks digunakan untuk mengukur semua jenis perubahan kuantitatif dalam bidang perindustrian, pertanian, perdagangan dan perkhidmatan. Selain itu, nombor indeks juga penting dalam mengukur magnitud ekonomi seperti pendapatan, pekerjaan, eksport, import, harga dan lain-lain.

Imbas kod *QR* ini untuk menonton video mengenai Indeks Harga Pengguna (IHP) di Malaysia.

bit.ly/2TawqbE

10.1 Nombor Indeks

Mentakrif dan mentafsir nombor indeks

Berdasarkan perbualan di atas, apakah kesimpulan yang dapat dibuat tentang harga telefon pintar pada tahun lepas dan tahun ini? Jika anda dapat menyatakan bahawa terdapat peningkatan harga sebanyak 10%, anda sebenarnya telah membuat perkaitan tentang nombor indeks.

Secara umumnya, nombor indeks ialah satu sukatan statistik yang digunakan untuk mengukur perubahan suatu pemboleh ubah pada suatu tahun tertentu berbanding dengan tahun yang lain sebagai tahun asas. Asas ini biasanya mengambil nilai 100 dan nombor indeks ialah 100 kali nisbah kepada nilai asas ini. Pemboleh ubah boleh terdiri daripada nilai mata wang, harga, produk, penghasilan, kuantiti, pekerjaan dan sebagainya.

Muzium Matematik

Catatan terawal pengiraan nombor indeks ialah pada tahun 1750.

Terdapat pelbagai jenis nombor indeks dan pengiraannya yang tersendiri. Contohnya:

Indeks harga pengguna

$$IHP = \frac{\text{Kos pasaran bagi tahun semasa}}{\text{Kos pasaran bagi tahun asas}} \times 100$$

Indeks kematian akibat kemalangan jalan raya

$$I = \frac{a}{\sum \text{Kenderaan}} \times 10\ 000$$

a = Jumlah kematian bagi tahun semasa
$\sum$Kenderaan = Jumlah terkumpul kenderaan berdaftar sehingga tahun semasa

Indeks kualiti udara

$$I = \frac{I_{tinggi} - I_{rendah}}{C_{tinggi} - C_{rendah}}(C - C_{rendah}) + I_{tinggi}$$

I = Indeks kualiti udara
C = Kepekatan pencemar

Indeks jisim badan

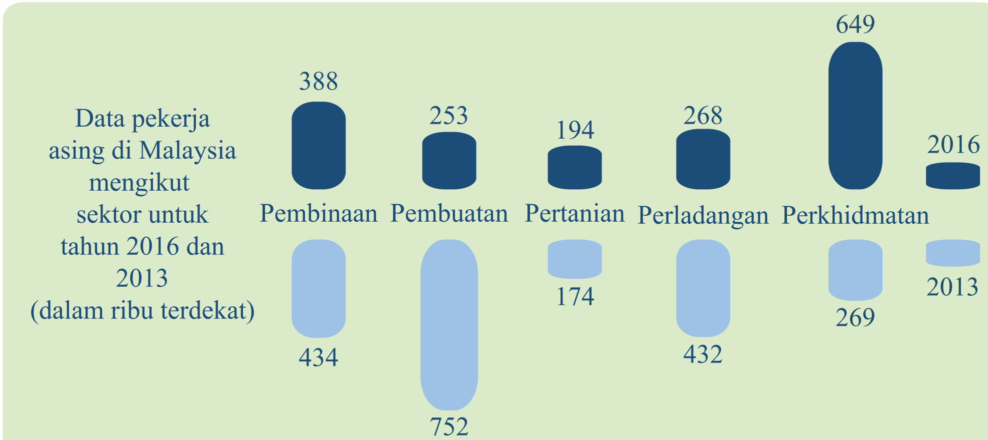
$$BMI = \frac{\text{Berat (kg)}}{\text{Tinggi (cm)} \times \text{Tinggi (cm)}} \times 100$$

INKUIRI 1 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Menentukan peratus perubahan dan membuat perkaitan dengan nombor indeks

Arahan:

1. Bentukkan 5 kumpulan.
2. Perhatikan info grafik berikut tentang data bagi jumlah pekerja asing mengikut sektor di Malaysia pada tahun 2013 dan 2016.



[Sumber: *Data Terbuka Malaysia*]

3. Setiap kumpulan perlu memilih satu sektor sahaja untuk dianalisis.
4. Bersama-sama ahli kumpulan, jawab soalan berikut:
   (a) Tentukan peratus perubahan pada data tahun 2016 berbanding tahun 2013 bagi setiap sektor dan buat tafsiran tentang peratus perubahan yang diperoleh.
   (b) Senaraikan punca yang menyebabkan berlakunya perubahan tersebut.
   (c) Nyatakan dua implikasi kemasukan pekerja asing terhadap negara.
   (d) Senaraikan cadangan langkah-langkah untuk mengatasi kesan negatif kemasukan pekerja asing di negara ini.
5. Persembahkan hasil kerja kumpulan anda dalam bentuk yang menarik untuk dibentangkan di hadapan kelas.
6. Lakukan sesi soal jawab dengan ahli kumpulan yang lain.

Daripada Inkuiri 1, dengan menjadikan tahun 2013 sebagai masa asas, peratus perubahan data pekerja asing di Malaysia pada tahun 2016 berbanding tahun 2013 adalah suatu nombor indeks.

$$\text{Peratus perubahan data pekerja asing sektor pembinaan} = \frac{388}{434} \times 100\%$$
$$= 89.4\%$$

Peratus perubahan tersebut juga boleh ditulis dalam nombor indeks, I:

$$I = \frac{388}{434} \times 100$$
$$= 89.4$$

Secara amnya, rumus bagi nombor indeks boleh ditulis sebagai:

$$I = \frac{Q_1}{Q_0} \times 100$$

dengan Q_0 = Harga/Kuantiti pada masa asas
Q_1 = Harga/Kuantiti pada masa tertentu

POKET MATEMATIK

Indeks harga atau kuantiti ialah suatu nisbah dalam peratusan, tetapi tanda peratusnya tidak ditulis.

Contoh 1

Harga seutas jam tangan berjenama X pada tahun 2017 dan 2018 masing-masing ialah RM500 dan RM550. Hitung nombor indeks bagi harga jam tangan itu pada tahun 2018 berasaskan tahun 2017. Tafsirkan nombor indeks yang diperoleh.

Penyelesaian

Biarkan Q_0 = Harga pada tahun 2017
Q_1 = Harga pada tahun 2018

$$\text{Nombor Indeks, } I = \frac{Q_1}{Q_0} \times 100$$
$$= \frac{550}{500} \times 100$$
$$= 110$$

Maka, terdapat peningkatan harga sebanyak 10% dari tahun 2017 ke tahun 2018.

TIP PINTAR

Nombor indeks yang bernilai lebih daripada 100 bermaksud berlaku peningkatan berbanding tahun asas manakala nombor indeks yang bernilai kurang daripada 100 bermaksud berlaku pengurangan atau penurunan berbanding tahun asas.

Contoh 2

Pendaftaran badan sukan yang diterima oleh Pejabat Pesuruhjaya Sukan (PJS) pada tahun 2017 ialah sebanyak 893. Diberi nombor indeks bagi pendaftaran badan sukan pada tahun 2017 berasaskan tahun 2010 ialah 156.39, hitung bilangan pendaftaran badan sukan pada tahun 2010.

Penyelesaian

Biarkan Q_0 = Bilangan pendaftaran pada tahun 2010
Q_1 = Bilangan pendaftaran pada tahun 2017

$$I = \frac{Q_1}{Q_0} \times 100$$
$$156.39 = \frac{893}{Q_0} \times 100$$
$$Q_0 = 571$$

Maka, bilangan pendaftaran badan sukan pada tahun 2010 ialah sebanyak 571.

Cabar Minda

Adakah nombor indeks boleh bernilai 100? Jika ya, bilakah situasi tersebut akan berlaku?

Contoh 3

Indeks harga bagi sebuah basikal pada tahun 2018 berasaskan tahun 2010 dan 2015 masing-masing ialah 176 dan 110. Cari indeks harga basikal itu pada tahun 2015 berasaskan tahun 2010.

Penyelesaian

$$\frac{Q_{2018}}{Q_{2010}} \times 100 = 176 \quad \cdots ①$$

$$\frac{Q_{2018}}{Q_{2015}} \times 100 = 110 \quad \cdots ②$$

$$① \div ②: \quad \frac{Q_{2015}}{Q_{2010}} = \frac{176}{110}$$

$$I = \frac{Q_{2015}}{Q_{2010}} \times 100$$
$$= \frac{176}{110} \times 100$$
$$= 160$$

Kaedah Alternatif

$$I_{2018/2015} = \frac{I_{2018/2010}}{I_{2015/2010}} \times 100$$
$$110 = \frac{176}{I_{2015/2010}} \times 100$$
$$I_{2015/2010} = \frac{176}{110} \times 100$$
$$= 160$$

QR

Kaedah lain untuk menyelesaikan masalah berkaitan nombor indeks.

bit.ly/2BgEvnk

Latih Diri 10.1

1. Persatuan Automotif Malaysia (MAA) melaporkan bahawa jumlah kenderaan komersial yang berdaftar pada tahun 2015 ialah 75 376 buah manakala jumlah kenderaan komersial yang berdaftar pada tahun 2017 ialah 61 956 buah. Hitung indeks bilangan kenderaan komersial yang berdaftar pada tahun 2017 berasaskan tahun 2015 dan tafsirkan.

2. Purata perbelanjaan bulanan isi rumah di Malaysia pada tahun 2014 ialah RM3 578. Pada tahun 2017, purata perbelanjaan bulanan isi rumah ialah RM4 033. Cari indeks purata perbelanjaan bulanan isi rumah pada tahun 2017 berasaskan tahun 2014 dan tafsirkan.

3. Jumlah pengeluaran buah sawit di Malaysia pada tahun 2013 ialah sebanyak 720 440 105 tan metrik. Diberi indeks jumlah pengeluaran buah sawit pada tahun 2016 berasaskan tahun 2013 ialah 90.23, cari jumlah pengeluaran buah sawit pada tahun 2016.

4. Jadual di bawah menunjukkan indeks harga bagi sejenis air minuman.

Tahun 2013 (2011 = 100)	Tahun 2019 (2011 = 100)	Tahun 2019 (2013 = 100)
150	225	p

Cari nilai p.

TIP PINTAR

Tahun 2013 (2011 = 100) bermaksud indeks harga pada tahun 2013 berasaskan tahun 2011.

5. Indeks pengeluaran perindustrian pembuatan gula pada tahun 2011 dan 2012 berasaskan tahun 2010 masing-masing ialah 101.4 dan 95.8. Hitung indeks pengeluaran perindustrian pembuatan gula pada tahun 2012 berasaskan tahun 2011.

10.1.1 10.1.2

Menyelesaikan masalah yang melibatkan nombor indeks

Contoh 4 APLIKASI MATEMATIK

Menurut perangkaan dari Kementerian Sumber Asli dan Alam Sekitar, jumlah pelawat ke Taman Negara Pahang, Sungai Relau pada tahun 2016 ialah 17 721 orang. Jika Perbadanan Taman Negara menyasarkan pertambahan jumlah pelawat sebanyak 10% menjelang tahun 2018, hitung jangkaan bilangan pelawat pada tahun 2020 sekiranya kadar pertambahan pelawat dari tahun 2018 ke tahun 2020 adalah sama dengan pertambahan pelawat dari tahun 2016 ke tahun 2018.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Bilangan pelawat pada tahun 2016 ialah 17 721 orang.
- Kenaikan sebanyak 10 peratus dari tahun 2016 ke tahun 2018.
- Kenaikan sebanyak 10 peratus dari tahun 2018 ke tahun 2020.
- Cari bilangan pelawat pada tahun 2020.

2. Merancang strategi

- Cari bilangan pelawat pada tahun 2018 menggunakan rumus nombor indeks.
- Dengan menggunakan bilangan pelawat pada tahun 2018, bilangan pelawat pada tahun 2020 dihitung menggunakan rumus nombor indeks.

3. Melaksanakan strategi

Bilangan pelawat bagi tahun 2018

$$I_{2018/2016} = \frac{Q_{2018}}{Q_{2016}} \times 100$$

$$110 = \frac{Q_{2018}}{17\ 721} \times 100$$

$$Q_{2018} = 19\ 493$$

Bilangan pelawat bagi tahun 2020

$$I_{2020/2018} = \frac{Q_{2020}}{Q_{2018}} \times 100$$

$$110 = \frac{Q_{2020}}{19\ 493} \times 100$$

$$Q_{2020} = 21\ 442$$

Maka, jangkaan bilangan pelawat pada tahun 2020 ialah 21 442 orang.

4. Membuat refleksi

- Nombor indeks bagi tahun 2020 berasaskan tahun 2018, $\frac{21\ 442}{19\ 493} \times 100 \approx 110$
- Nombor indeks bagi tahun 2018 berasaskan tahun 2016, $\frac{19\ 493}{17\ 721} \times 100 \approx 110$

BAB 10

INKUIRI 2 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Kajian tentang penggunaan nombor indeks

Arahan:

1. Teliti teks keratan akhbar yang berikut.

Kadar kemalangan dalam kalangan rakyat membimbangkan

BANGI: Institut Keselamatan dan Kesihatan Pekerjaan Negara (NIOSH) melahirkan kebimbangan berikutan peningkatan kadar kemalangan dalam kalangan rakyat negara ini daripada 66 618 kes pada tahun 2016 kepada 69 980 kes pada tahun 2017.

Pengerusi NIOSH, Tan Sri Lee Lam Thye berkata, menerusi statistik dikeluarkan Pertubuhan Keselamatan Sosial (PERKESO), sebanyak 33 319 kes direkodkan pada 2017 membabitkan kemalangan ketika perjalanan sama ada pergi atau balik ke tempat kerja, peningkatan sebanyak 6.4 peratus daripada 31 314 kes kemalangan dicatat pada 2016. Katanya, kes kemalangan perusahaan pula meningkat sebanyak 3.84 peratus daripada 35 304 kes pada 2016 kepada 36 661 kes pada 2017.

"Peningkatan ini amatlah merisaukan berikutan dalam kita menyambut hari kemerdekaan negara ke-61 tahun, kita masih lagi dibelenggu dengan kadar kemalangan yang saban tahun terus meningkat. Jelas menerusi statistik itu, kita boleh simpulkan bahawa kita hanya merdeka atau bebas dari belenggu penjajah, tapi masih belum merdeka daripada aspek sikap terutama apabila berada di jalan raya," katanya dalam sidang media selepas merasmikan Sambutan Hari Kebangsaan kali Ke-61 Peringkat NIOSH 2018 di Ibu Pejabat NIOSH, di sini.

(Sumber: https://www.bharian.com.my/berita/nasional/2018/08/468225/kadar-kemalangan-di-kalangan-rakyat-membimbangkan)

2. Lakukan sumbang saran antara ahli kumpulan dan jawab soalan berikut:
   (a) Buat satu konjektur tentang indeks kemalangan pekerjaan yang berlaku pada tahun 2017 berbanding tahun 2016.
   (b) Apakah kesan yang akan berlaku jika kadar kemalangan pekerjaan di negara kita semakin meningkat?
   (c) Apakah punca peningkatan kemalangan pekerjaan di negara kita?
   (d) Cadangkan beberapa cara untuk mengurangkan kadar kemalangan pekerjaan di negara kita.
3. Sediakan satu folio berbentuk grafik untuk menjawab soalan-soalan di atas.
4. Pamerkan hasil kerja kumpulan anda untuk dilihat oleh kumpulan lain.

Latih Diri 10.2

1. Jadual menunjukkan indeks harga bagi keperluan dapur pada tahun 2015 dan tahun 2020 berasaskan tahun 2010.

Item	Indeks harga pada tahun	
	2015	2020
Keperluan dapur	125	140

Cari indeks harga bagi keperluan dapur tersebut pada tahun 2020 berasaskan tahun 2015.

2. Bayaran premium insurans bagi satu syarikat pada tahun 2016 meningkat sebanyak 5 peratus berbanding tahun 2011. Pada tahun 2018, bayaran premium tersebut meningkat sekali lagi sebanyak 10 peratus berbanding tahun 2011. Cari indeks bayaran premium insurans pada tahun 2018 berbanding tahun 2016.

Latihan Intensif 10.1

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2LfCL2g untuk kuiz

1. Pada bulan Januari 2017, purata suhu di bandar P ialah 25.3°C manakala purata suhu pada bulan Februari 2017 ialah 27.4°C. Cari indeks purata suhu pada bulan Februari dengan mengambil bulan Januari sebagai masa asas dan tafsirkan nombor indeks yang diperoleh.
2. Diberi indeks harga bagi sejenis item pada tahun 2016 berasaskan tahun 2015 ialah 130 dan indeks harga pada tahun 2016 berasaskan tahun 2012 ialah 120. Cari indeks harga item tersebut pada tahun 2015 berasaskan tahun 2012 dan tafsirkan.
3. Jadual di bawah menunjukkan harga dan indeks harga bagi tiga jenis bahan, P, Q dan R yang digunakan untuk membuat sejenis biskut.

Bahan	Harga (RM/kg)		Indeks harga pada tahun 2019 berasaskan tahun 2015
	Tahun 2015	Tahun 2019	
P	x	0.40	80
Q	2.00	y	140
R	0.80	1.00	z

Cari nilai-nilai x, y dan z.

4. Jadual di bawah menunjukkan harga runcit seekor ayam pada bulan Januari bagi tahun 2015 hingga 2018.

Tahun	Harga (RM/kg)	Indeks harga
2015	5.80	p
2016	7.65	q
2017	7.80	r
2018	7.30	s

Dengan mengambil tahun 2015 sebagai tahun asas, cari nilai bagi p, q, r dan s.

5. Jadual di bawah menunjukkan indeks harga bagi sejenis makanan pada tahun 2015 dan 2018 berasaskan tahun 2010.

Item	Indeks harga	
	Tahun 2015	Tahun 2018
Makanan	110	118

Cari indeks harga bagi makanan itu pada tahun 2018 berasaskan tahun 2015.

10.2 Indeks Gubahan

Menentukan dan mentafsir indeks gubahan

INKUIRI 3 Berpasangan PAK-21

Tujuan: Menentukan indeks gubahan
Arahan:
1. Jadual di bawah menunjukkan indeks harga dan peratus bagi empat jenis bahan yang digunakan untuk membuat biskut semperit pada tahun 2019 berasaskan tahun 2018.

Bahan	Indeks harga	Peratus (%)
Mentega	120	30
Gula	127	15
Tepung gandum	108	50
Telur	107	5

2. Hitung purata indeks harga bagi keempat-empat bahan dan buat satu kesimpulan bagi nilai purata ini.
3. Apakah peranan nilai peratus dalam pengiraan purata indeks harga? Sekiranya nilai peratus ini sama bagi keempat-empat bahan, apakah tafsiran yang dapat anda lakukan?
4. Bentangkan hasil dapatan anda di hadapan kelas dan lakukan sesi soal jawab dengan pasangan yang lain.

Daripada Inkuiri 3, purata indeks harga diperoleh seperti berikut:

$$\text{Purata indeks harga} = \frac{(120 \times 30) + (127 \times 15) + (108 \times 50) + (107 \times 5)}{100}$$
$$= 114.4$$

Nilai purata indeks harga ini bermaksud terdapat peningkatan harga bahan mentah pada tahun 2019 berbanding tahun 2018. Nilai peratus mewakili kepentingan bagi penggunaan setiap jenis bahan mentah yang digunakan untuk membuat biskut semperit.

Nilai bagi purata indeks harga ini dikenali sebagai **indeks gubahan** ($\bar{I}$) yang bermaksud gabungan beberapa indeks sebagai ukuran statistik untuk melihat prestasi pasaran atau sektor dari semasa ke semasa yang melibatkan kepentingan setiap item. Kepentingan ini dikenali sebagai **pemberat** (w). Nilai pemberat boleh diwakili oleh bilangan, nisbah, peratusan, bacaan pada carta palang atau carta pai dan sebagainya.

Jika $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$ ialah indeks harga bagi n item masing-masing dengan pemberat w_1, w_2, w_3, ..., w_n, maka indeks gubahan boleh dihitung dengan menggunakan rumus berikut:

$$\bar{I} = \frac{(I_1w_1 + I_2w_2 + I_3w_3 + \ldots + I_nw_n)}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n}$$
$$\bar{I} = \frac{\Sigma I_iw_i}{\Sigma w_i}$$
dengan I_i = nombor indeks dan w_i = pemberat

10.2.1

BAB 10

Contoh 5

Indeks harga satu kilogram bagi tiga jenis buah-buahan yang dijual di sebuah gerai pada tahun 2018 berasaskan tahun 2010 masing-masing ialah 175, 120 dan 160. Cari indeks gubahan bagi buah-buahan tersebut pada tahun 2018 berasaskan tahun 2010.

Penyelesaian

Indeks gubahan, $\bar{I} = \dfrac{\sum I_i w_i}{\sum w_i}$

$$\bar{I} = \frac{175(1) + 120(1) + 160(1)}{3}$$

Pemberat bagi setiap jenis buah ialah 1

$$= 151.67$$

POKET MATEMATIK

Indeks gubahan tanpa pemberat dihitung dengan menganggap nilai pemberat adalah sama untuk setiap nombor indeks.

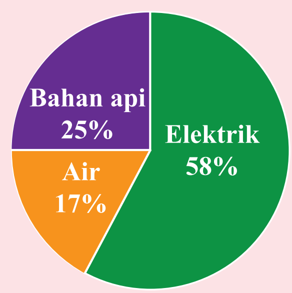
Cabar Minda

Apakah perbezaan antara indeks gubahan dengan pemberat dan tanpa pemberat? Huraikan kepentingan pemberat dalam pengiraan indeks gubahan.

Contoh 6

Jadual di bawah menunjukkan indeks perbelanjaan utiliti sebuah kilang pada tahun 2017 berasaskan tahun 2011. Carta pai pula menunjukkan peratus penggunaannya dalam sebulan.

Utiliti	Indeks perbelanjaan
Air	135
Elektrik	140
Bahan api	125



Cari indeks gubahan perbelanjaan utiliti pada tahun 2017 berasaskan tahun 2011.

Penyelesaian

Indeks gubahan, $\bar{I} = \dfrac{\sum I_i w_i}{\sum w_i}$

$$= \frac{135(17) + 140(58) + 125(25)}{17 + 58 + 25}$$

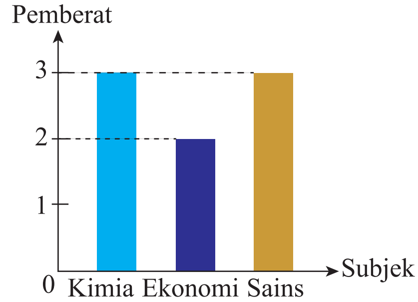
$$= \frac{13\,540}{100}$$

$$= 135.4$$

Latih Diri 10.3

1. Indeks harga bagi kuih tradisional seperti kuih nekbat, kuih nagasari dan kuih serabai pada tahun 2020 berasaskan tahun 2015 masing-masing ialah 105, 112 dan 98. Cari indeks gubahan bagi ketiga-tiga kuih tradisional tersebut pada tahun 2020 berasaskan tahun 2015 dan tafsirkan nilai yang diperoleh.

2. Carta palang di sebelah menunjukkan mata kredit bagi tiga subjek di sebuah kolej. Diberi indeks kemasukan murid mengikut subjek Kimia, Ekonomi dan Sains pada tahun 2019 berasaskan 2015 masing-masing ialah 136, m dan 108. Cari nilai bagi m jika indeks gubahan bagi ketiga-tiga subjek pada tahun 2019 berasaskan tahun 2015 ialah 120.



Menyelesaikan masalah melibatkan nombor indeks dan indeks gubahan

Konsep nombor indeks dan indeks gubahan yang telah dipelajari sebelum ini digunakan secara meluas dalam pelbagai bidang untuk mengenal pasti dan memantau trend sesuatu harga, penghasilan, pekerjaan, inflasi dan sebagainya.

Contoh 7

Jadual di bawah menunjukkan harga kos bagi tiga bahan utama dalam pembuatan keluli tahan karat oleh sebuah syarikat.

Bahan	Harga pada tahun 2010 (RM per tan metrik)	Harga pada tahun 2018 (RM per tan metrik)	Peratus (%)
Besi	2 025	3 424	72
Kromium	8 431	9 512	18
Nikel	62 235	50 916	10

(a) Hitung indeks harga bagi besi, kromium dan nikel pada tahun 2018 berasaskan tahun 2010.
(b) Hitung indeks gubahan bagi harga kos pembuatan keluli tahan karat pada tahun 2018 berasaskan tahun 2010. Berikan tafsiran mengenai dapatan anda.
(c) Tentukan harga kos pembuatan keluli tahan karat pada tahun 2018 jika harga kos pada tahun 2010 ialah RM65 juta.

Penyelesaian

(a)
$$I_{\text{Besi}} = \frac{Q_{2018}}{Q_{2010}} \times 100 = \frac{3\ 424}{2\ 025} \times 100 = 169.09$$

$$I_{\text{Kromium}} = \frac{Q_{2018}}{Q_{2010}} \times 100 = \frac{9\ 512}{8\ 431} \times 100 = 112.82$$

$$I_{\text{Nikel}} = \frac{Q_{2018}}{Q_{2010}} \times 100 = \frac{50\ 916}{62\ 235} \times 100 = 81.81$$

Maka, indeks harga bagi besi, kromium dan nikel pada tahun 2018 berasaskan tahun 2010 masing-masing ialah 169.09, 112.82 dan 81.81.

(b) Bina jadual untuk mencari $\sum w_i$ dan $\sum I_i w_i$.

Bahan	I_i	w_i	$I_i w_i$
Besi	169.09	72	12 174.48
Kromium	112.82	18	2 030.76
Nikel	81.81	10	818.10
		$\sum w_i = 100$	$\sum I_i w_i = 15\ 023.34$

$$\bar{I} = \frac{\sum I_i w_i}{w_i}$$
$$= \frac{15\ 023.34}{100}$$
$$= 150.23$$

Terdapat peningkatan sebanyak 50.23% bagi harga kos pembuatan keluli tahan karat pada tahun 2018 berbanding tahun 2010.

(c) $$I = \frac{Q_{2018}}{Q_{2010}} \times 100$$
$$150.23 = \frac{Q_{2018}}{65} \times 100$$
$$Q_{2018} = 97.65$$

Maka, harga kos pembuatan keluli tahan karat pada tahun 2018 ialah RM97.65 juta.

SUMBANG SARAN

Adakah penurunan harga nikel pada tahun 2018 memberi kesan kepada keseluruhan kos pembuatan keluli tahan karat? Bincangkan.

Latih Diri 10.4

1. Jadual di bawah menunjukkan harga bagi empat barangan, A, B, C dan D yang digunakan dalam pembuatan atap genting pada tahun 2016 dan 2010.

Barangan	Harga (RM)		Pemberat (%)
	2010	2016	
A	1.40	2.10	10
B	1.50	1.56	20
C	1.60	1.92	40
D	4.50	5.58	30

(a) Hitung indeks harga bagi setiap barangan pada tahun 2016 berasaskan tahun 2010.
(b) Hitung indeks gubahan bagi harga semua barangan pada tahun 2016 berasaskan tahun 2010. Berikan tafsiran mengenai dapatan anda.
(c) Tentukan harga bagi atap genting tersebut pada tahun 2010 jika harganya pada tahun 2016 ialah RM2.65.

2. Jadual di bawah menunjukkan harga bagi lima bahan yang digunakan dalam penghasilan sejenis cenderamata pada tahun 2019 dan 2013.

Bahan	Harga pada tahun 2013 (RM)	Harga pada tahun 2019 (RM)	Indeks harga (2013 = 100)	Pemberat (%)
P	5.00	6.00	120	8
Q	20.00	23.00	a	12
R	8.00	12.00	b	20
S	16.00	18.00	c	27
T	10.00	13.00	130	d

(a) Hitung nilai bagi a, b, c dan d.
(b) Hitung indeks gubahan bagi cenderamata tersebut pada tahun 2019 berasaskan tahun 2013. Berikan tafsiran mengenai dapatan anda.
(c) Tentukan harga bagi cenderamata tersebut pada tahun 2019 jika harganya pada tahun 2013 ialah RM35.
(d) Hitung indeks harga bagi cenderamata itu pada tahun 2021 jika kos keseluruhan bahan dijangka meningkat sebanyak 10% pada tahun 2021.

Latihan Intensif 10.2

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2SO2LEy untuk kuiz

1. Pengambilan murid di sebuah sekolah bagi aliran Sains dan Sastera mengikut nisbah 60 : 40. Diberi indeks kemasukan murid mengikut aliran Sains dan Sastera pada tahun 2019 berasaskan tahun 2015 masing-masing ialah 120 dan 130. Cari indeks gubahan bagi kemasukan murid di sekolah tersebut pada tahun 2019 berasaskan tahun 2015.

2. Syarikat Myra mempunyai perusahaan kecil di tiga buah daerah di Selangor. Jadual di bawah menunjukkan perubahan produktiviti dan bilangan pekerja bagi tiga perusahaan kecil itu pada tahun 2018 berasaskan tahun 2010.

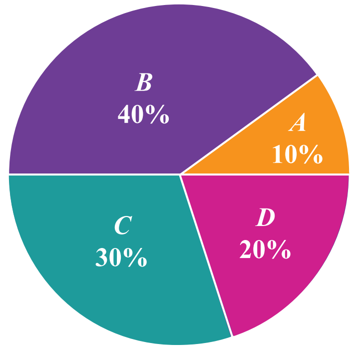
Daerah	Perubahan produktiviti dari tahun 2010 ke tahun 2018	Bilangan pekerja
Kuala Langat	Meningkat 10%	3
Gombak	Tidak berubah	2
Shah Alam	Menyusut 20%	5

Cari indeks gubahan bagi produktiviti perusahaan kecil di ketiga-tiga daerah tersebut. Berikan pendapat anda mengenai produktiviti Syarikat Myra berdasarkan nilai yang anda peroleh.

3. Pentaksiran subjek di sebuah kolej terdiri daripada format Kertas 1, Kertas 2 dan Kerja Kursus. Markah kerja kursus ialah 20% daripada markah keseluruhan, manakala markah Kertas 1 dan Kertas 2 ialah 80% daripada markah keseluruhan dan kedua-duanya penting bagi pengiraan markah akhir. Kalaivathy memperoleh markah bagi Kertas 1, Kertas 2 dan Kerja Kursus masing-masing sebanyak 85, 72 dan 68. Hitung markah akhir yang diperoleh Kalaivathy untuk subjek tersebut.

4. Jadual di bawah menunjukkan indeks harga dan perubahan indeks harga bagi empat bahan utama dalam penghasilan pencuci muka.

Bahan	Indeks harga pada tahun 2021 berasaskan tahun 2019	Perubahan indeks harga dari tahun 2021 ke tahun 2023
A	150	Tidak berubah
B	140	Menyusut 10%
C	m	Tidak berubah
D	115	Meningkat 20%

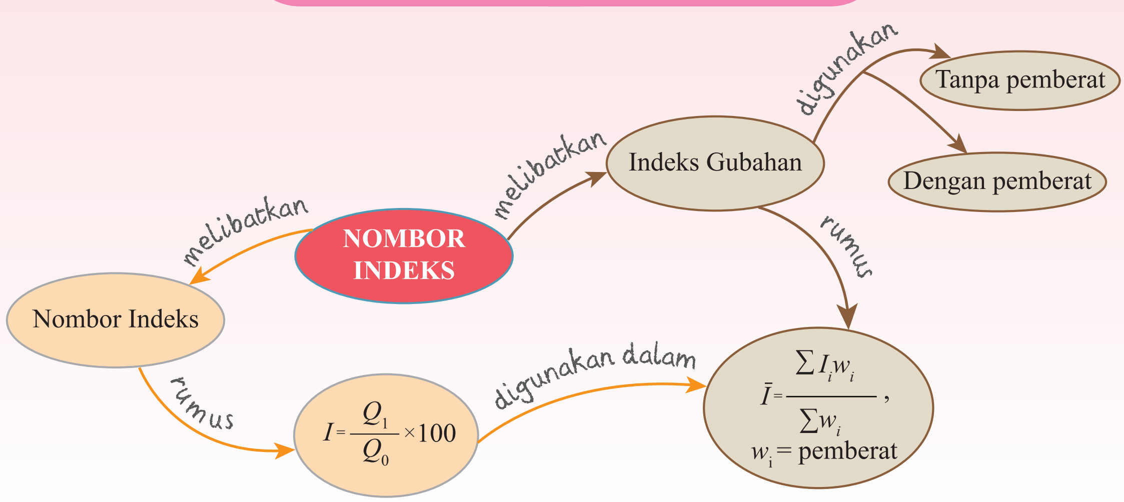


(a) Cari nilai m jika indeks gubahan penghasilan pencuci muka tersebut pada tahun 2021 berasaskan tahun 2019 ialah 133.

(b) Hitung indeks gubahan bagi penghasilan pencuci muka pada tahun 2023 berasaskan tahun 2019.

(c) Hitung kos penghasilan pencuci muka pada tahun 2023 jika kos sepadan pada tahun 2019 ialah RM19.50.

RUMUSAN BAB 10



TULIS JURNAL ANDA

Berdasarkan pemahaman anda sepanjang pembelajaran, apakah yang anda faham mengenai nombor indeks? Pada pendapat anda, bagaimanakah cara menentukan tahun asas yang paling sesuai untuk mencari nombor indeks bagi sesuatu barangan atau perkhidmatan? Bagaimanakah pula penentuan pemberat? Apakah faktor-faktor yang mempengaruhi relatif kepentingan sesuatu item?

LATIHAN PENGUKUHAN

1. Jadual di bawah menunjukkan harga per kg bagi empat jenis bahan, *A*, *B*, *C*, dan *D* pada tahun 2017 dan 2019, indeks harga pada tahun 2019 berasaskan tahun 2017 dan pemberat masing-masing. TP3

Bahan	Harga pada tahun 2017 (RM/kg)	Harga pada tahun 2019 (RM/kg)	Indeks harga pada tahun 2019 (2017 = 100)	Pemberat
A	2.00	2.20	z	4
B	0.80	y	125	1
C	1.10	1.10	100	2
D	x	1.20	120	3

(a) Cari nilai-nilai x, y dan z.
(b) Hitung indeks gubahan bagi bahan-bahan tersebut pada tahun 2019 berasaskan tahun 2017.

2. Jadual di bawah menunjukkan indeks harga bagi dua bahan, *A* dan *B* yang digunakan untuk pengeluaran suatu jenis barang perhiasan rumah. TP3

Bahan	Indeks harga pada tahun 2018 berasaskan tahun 2016	Indeks harga pada tahun 2020 berasaskan tahun 2016
A	110	m
B	n	110

Diberi harga bagi bahan *B* meningkat 22% pada tahun 2018 dari tahun 2016. Harga bahan *A* pada tahun 2016 ialah RM5.00 dan harganya pada tahun 2020 ialah RM6.05. Cari nilai bagi m dan n.

3. Jadual di bawah menunjukkan maklumat berkaitan empat bahan, *A*, *B*, *C* dan *D* yang digunakan dalam pembuatan alat permainan. Peratus penggunaan bahan *B* tidak ditunjukkan. TP4

Bahan	Perubahan indeks harga dari tahun 2015 ke tahun 2018	Peratus penggunaan (%)
A	Menyusut 10%	50
B	Menokok 60%	
C	Menokok 20%	10
D	Menokok 40%	10

Kos pengeluaran bagi alat permainan ini ialah RM41 650 pada tahun 2018.
(a) Jika harga bahan *C* pada tahun 2015 ialah RM7.60, cari harganya pada tahun 2018.
(b) Hitung kos pengeluaran yang sepadan pada tahun 2015.
(c) Kos pengeluaran dijangka akan meningkat sebanyak 60% dari tahun 2018 ke tahun 2020. Hitung peratus perubahan dalam kos pengeluaran dari tahun 2015 ke tahun 2020.

4. Pengeluaran getah di Malaysia ialah 1.126 juta tan pada tahun 2005, x juta tan pada tahun 2010 dan 0.722 juta tan pada tahun 2015. Hitung TP3
(a) nombor indeks pengeluaran getah pada tahun 2015 berasaskan tahun 2005,
(b) nilai x, diberi nombor indeks pengeluaran getah pada tahun 2010 berasaskan tahun 2005 ialah 83,
(c) indeks pengeluaran getah pada tahun 2020 berasaskan tahun 2005 jika indeks pengeluaran getah pada tahun 2020 berasaskan tahun 2010 ialah 105.

5. Jadual di bawah menunjukkan harga bagi sejenis item pada tahun 2000 dan 2015. TP4

Tahun	Harga
2000	RM8
2015	RM10

(a) Jika kadar kenaikan harga dari tahun 2015 ke tahun 2020 ialah dua kali ganda kadar kenaikan harga dari tahun 2000 ke tahun 2015, cari harga item tersebut pada tahun 2020.
(b) Hitung indeks harga pada tahun 2020 berasaskan tahun 2000.

6. Jadual di bawah menunjukkan indeks harga dan pemberat bagi empat jenis bahan pada tahun 2020 berasaskan tahun 2019. TP4

Bahan	Indeks harga	Pemberat
P	107	2
Q	118	x
R	94	1
S	105	$2x$

(a) Indeks gubahan bagi bahan-bahan tersebut pada tahun 2020 berasaskan tahun 2019 ialah 108. Cari nilai x.
(b) Indeks harga bagi bahan P meningkat sebanyak 20% dan indeks harga bagi bahan S menurun sebanyak 10% pada tahun 2020 hingga tahun 2021. Indeks harga bagi bahan lain tidak berubah. Cari indeks gubahan bagi bahan-bahan tersebut pada tahun 2021 berasaskan tahun 2019.

7. Jadual di bawah menunjukkan indeks jualan bagi ensiklopedia pada tahun 2015 dan 2017 menggunakan tahun 2000 sebagai tahun asas. TP4

Tahun	2015	2017
Indeks jualan	109	145

Cari indeks jualan bagi ensiklopedia itu pada tahun 2017 berasaskan tahun 2015.

8. Jadual di bawah menunjukkan indeks harga bagi tiga jenis kamera. TP4

Tahun / Kamera	2013 (2011 = 100)	2019 (2011 = 100)	2019 (2013 =1 00)
J	165	231	p
K	q	156	120
L	150	r	170

Cari nilai bagi p, q dan r.

9. Berikut menunjukkan bilangan pelawat yang mengunjungi Pulau Langkawi pada tahun 2010 dan tahun 2017. TP5

2010	2.45 juta
2017	3.68 juta

(a) Cari bilangan pelawat pada tahun 2020 jika kadar kenaikan bilangan pelawat dari tahun 2017 ke tahun 2020 adalah dua kali ganda kadar kenaikan dari tahun 2010 ke tahun 2017.
(b) Hitung indeks bilangan pelawat pada tahun 2020 berasaskan tahun 2017. Nyatakan tafsiran anda berkaitan nombor indeks yang diperoleh.

10. Jadual di bawah menunjukkan harga dan pemberat bagi tiga jenis bahan, P, Q dan R pada tahun 2018 berasaskan tahun 2016. TP4

Bahan	P	Q	R
Indeks harga	80	130	140
Pemberat	x	y	z

Diberi indeks gubahan bagi bahan P dan Q pada tahun 2018 berasaskan tahun 2016 ialah 120 manakala bagi bahan P dan R ialah 125. Cari nisbah $x : y : z$.

11. Indeks harga bagi topi keledar pada tahun 2014 berasaskan tahun 2010 ialah 80 dan indeks harga pada tahun 2018 berasaskan tahun 2014 ialah 110. Diberi harga topi keledar pada tahun 2018 ialah RM166. TP5
(a) Hitung harga topi keledar pada tahun 2010 dan tahun 2014.
(b) Tentukan peratusan penurunan harga bagi topi keledar pada tahun 2010 berbanding dengan harganya pada tahun 2018.

12. Harga bagi caj perkhidmatan di sebuah agensi pada tahun 2018 ialah RM150. Jika harganya meningkat sebanyak 15% pada tahun 2019, hitung TP5
(a) indeks harga bagi caj perkhidmatan pada tahun 2019 menggunakan tahun 2018 sebagai tahun asas,
(b) harga bagi caj perkhidmatan tersebut pada tahun 2020 jika kadar kenaikan harga bagi tahun 2019 hingga tahun 2020 adalah sama dengan kadar kenaikan harga bagi tahun 2018 hingga tahun 2019.

Penerokaan MATEMATIK

1. Sediakan perbelanjaan bulanan keluarga anda bagi setiap kategori berikut dalam masa tiga bulan.
(a) Makanan dan minimum
(b) Pakaian dan kasut
(c) Kos bil air dan elektrik
(d) Pengangkutan
(e) Perubatan
(f) Pendidikan

2. Huraikan pemberatnya berdasarkan wang relatif yang dibelanjakan oleh keluarga anda.
3. Cari indeks gubahan bagi perbelanjaan bulan kedua dan ketiga berasaskan bulan pertama. Apakah kesimpulan yang dapat anda buat berdasarkan nilai indeks gubahan yang diperoleh?
4. Huraikan cara-cara untuk berbelanja dengan berhemah.
5. Bincang dalam kumpulan dan hasilkan satu folio grafik yang menarik.

JAWAPAN

Buka fail Jawapan Lengkap pada *QR* di halaman vii untuk mendapatkan langkah-langkah penyelesaian.

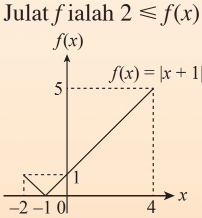
BAB 1 FUNGSI

Latih Diri 1.1

1. (a) Fungsi kerana setiap objek mempunyai hanya satu imej sahaja walaupun unsur 7 tidak mempunyai objek.
   (b) Fungsi kerana setiap objek mempunyai hanya satu imej sahaja walaupun unsur 4 mempunyai dua objek.
   (c) Bukan fungsi kerana objek r mempunyai dua imej, 8 dan 10.
2. (a) Fungsi (b) Bukan fungsi
   (c) Fungsi
3. (a) $h : x \to \frac{1}{x}, x \neq 0$ (b) $h : x \to |x|$
   (c) $h : x \to x^3$

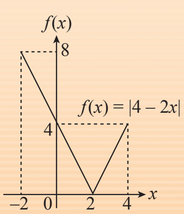
Latih Diri 1.2

1. (a) Domain = $\{-2, -1, 0, 2, 4\}$
   Kodomain = $\{1, 3, 4, 5\}$
   Julat = $\{1, 3, 4, 5\}$
   (b) Domain = $\{j, k, l, m\}$
   Kodomain = $\{2, 3, 6, 7, 10\}$
   Julat = $\{3, 7\}$
   (c) Domain f ialah $-3 \leqslant x \leqslant 5$
   Kodomain ialah $2 \leqslant f(x) \leqslant 6$
   Julat f ialah $2 \leqslant f(x) \leqslant 6$
2. (a)



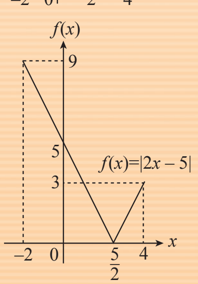
Julat f ialah $0 \leqslant f(x) \leqslant 5$.

   (b)



Julat f ialah $0 \leqslant f(x) \leqslant 8$.

   (c)



Julat f ialah $0 \leqslant f(x) \leqslant 9$.

Latih Diri 1.3

1. (a) $g(-5) = 2, g(-2) = 1, g\left(\frac{1}{2}\right) = -9$
   (b) $b = -\frac{1}{2}, b = 3$
2. (a) $k = 4$ (b) $k = 3$
   (c) $k = 3$
3. (a) $f(-2) = 11, f\left(-\frac{1}{2}\right) = 5$ (b) $\frac{1}{2}, 1$
   (c) $\frac{1}{2} < x < 1$ (d) $x < -\frac{1}{2}, x > 2$
4. 2, 6
5. (a) $m = -4, c = 15$
   (b) 7 (c) 3

Latihan Intensif 1.1

1. (a) dan (c) kerana setiap objek hanya mempunyai satu imej.
2. (a) Bukan fungsi (b) Bukan fungsi
   (c) Fungsi
3. (a) Fungsi kerana setiap objek hanya mempunyai satu imej.
   (b) Domain = $\{-7, -6, 6, 7\}$
   Julat = $\{36, 49\}$
   (c) $f : x \to x^2$
4. (a) $t = 6$ (b) $0 \leqslant f(x) \leqslant 6$
   (c) $0 \leqslant x \leqslant 4$
5. (a) (i) 80 meter (ii) 72 meter
   (iii) 45 meter
   (b) 3 saat

Latih Diri 1.4

1. (a) $f(x) = 3x$ (b) $gf(x) = 2x - 7$
2. (a) $fg : x \to 9 - 3x, gf : x \to 3 - 3x$
   $f^2 : x \to 9x, g^2 : x \to x$
   (b) $fg : x \to 4 + 2x^2, gf : x \to 4x^2 + 16x + 16$
   $f^2 : x \to 4x + 12, g^2 : x \to x^4$
   (c) $fg : x \to \frac{6}{x} + 4, x \neq 0, gf : x \to \frac{6}{x + 4}, x \neq -4$
   $f^2 : x \to x + 8, g^2 : x \to x$
   (d) $fg : x \to \frac{6 - 5x}{x - 1}, x \neq 1, gf : x \to \frac{1}{x - 6}, x \neq 6$
   $f^2 : x \to x - 10, g^2 : x \to \frac{x - 1}{2 - x}, x \neq 2$
3. $fg(x) = 3x^2 + 22, gf(x) = 9x^2 + 24x + 22$
   (a) $x = 1, x = 2$ (b) $x = 0, x = -4$
4. $a = -2, b = 9$ atau $a = 2, b = -3$
5. $h = -k$

Latih Diri 1.5

1. (a) $fg(3) = 4$ (b) $gf\left(-\frac{1}{5}\right) = 9$
   (c) $f^2(4) = 3, g^2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$
   (d) $f^2(-1) = 5, g^2(-1) = -\frac{1}{2}$
2. (a) $x = 2$ (b) $x = 2, x = -2$
   (c) $x = 2$ (d) $x = 1$

Latih Diri 1.6

1. (a) $g : x \rightarrow 2x^2 - 4x + 10$
   (b) $g : x \rightarrow x + 2$
2. (a) $g : x \rightarrow x^2 - 4x$ (b) $g : x \rightarrow 2x - 3$
3. (a) $g : x \rightarrow \frac{2}{x}, x \neq 0$ (b) $x = 24$
4. (a) $f(x) = 3x - 7$ (b) $gf(2) = -3$

Latih Diri 1.7

1. (a) $f^2(x) = \frac{x}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$
   $f^3(x) = \frac{x}{3x+1}, x \neq -\frac{1}{3}$
   $f^4(x) = \frac{x}{4x+1}, x \neq -\frac{1}{4}$
   (b) $f^{20}(x) = \frac{x}{20x+1}, x \neq -\frac{1}{20}$
   $f^{23}(x) = \frac{x}{23x+1}, x \neq -\frac{1}{23}$
2. (a) $f^2(x) = x$
   $f^3(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$
   $f^4(x) = x$
   (b) $f^{40}(2) = 2$
   $f^{43}(2) = \frac{1}{2}$
3. (a) $Ar(t) = \frac{16}{9}\pi t^6$ (b) $113\frac{7}{9}\pi\ \text{m}^2$
4. (a) (i) $v(t) = 200 + 100t$ (ii) $h = \frac{v}{\pi r^2}$
   (iii) $hv(t) = \frac{2+t}{4\pi}$
   (b) 1.75 cm
5. (a) $r(t) = 3t$
   (b) $Ar(t)$ ialah luas riak air, dalam cm^2, sebagai fungsi masa, t dalam saat
   (c) $8100\ \pi\ \text{cm}^2$

Latihan Intensif 1.2

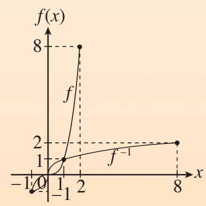
1. (a) $fg(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1$
   $gf(x) = \frac{2x-1}{2x}, x \neq 0$
   (b) $fg(2) = \frac{1}{3}$
   $gf\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$
   (c) $x = \frac{1}{3}$
2. (a) $h = 3, k = -1$ (b) $\frac{5}{6}$
3. $a = 2, b = 3$
4. (a) $h = 2, k = -3$
   (b) $gf(x) = \frac{-3x^2 + 18x - 19}{(x-3)^2}, x \neq 3$
5. (a) $a = 3, b = 1$ (b) $f^4(x) = 81x + 40$
6. (a) $A(x) = x^2, V(A) = 10A$
7. (a) $g(x) = 2x^2 - 3x - 13$
   (b) $g(x) = x^2 - 12x + 40$
   (c) $g(x) = 14 - x$
8. (a) $g : x \rightarrow \frac{x-1}{3}$ (b) $f(x) \rightarrow 9x^2 - 3x + 4$
9. (a) $p = 2, q = -1$ (b) $f^4(x) = 16x - 15$
   (c) $f^n(x) = 2^n x + 1 - 2^n$
10. $CN(t) = 15\ 000 + 800\ 000t - 40\ 000t^2$

Latih Diri 1.8

1. (a) $f(4) = -5$ (b) $f^{-1}(-1) = 6$
   (c) $f^{-1}(2) = -2$ (d) $f^{-1}(-5) = 4$
2. (a) $g(12) = -\frac{1}{2}$ (b) $g^{-1}(4) = \frac{3}{4}$
   (c) $h(-1) = 3$ (d) $h^{-1}(9) = 1$

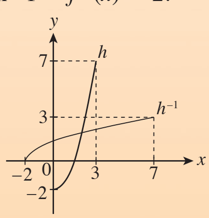
Latih Diri 1.9

1. (a) Mempunyai songsangan
   (b) Tidak mempunyai songsangan
   (c) Tidak mempunyai songsangan
   (d) Mempunyai songsangan
   (e) Tidak mempunyai songsangan
   (f) Tidak mempunyai songsangan
   (g) Mempunyai songsangan
2. (a) Fungsi songsang
   (b) Fungsi songsang
   (c) Bukan fungsi songsang
   (d) Bukan fungsi songsang
3.



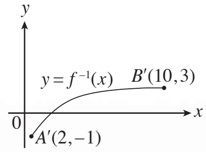
Domain bagi fungsi f^{-1} ialah $-1 \leqslant x \leqslant 8$ dan julatnya ialah $-1 \leqslant f^{-1}(x) \leqslant 2$.

4. (a)



   (b) Domain bagi fungsi h^{-1} ialah $-2 \leqslant x \leqslant 7$
   (c) $x = 2$
5. (a) $P'\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ (b) $Q'(-3, 1)$
   (c) $R'(5, 4)$ (d) $S'(-8, -6)$

6. (a)



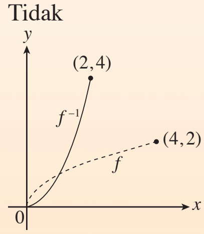
(b) $a = 1, b = 4$

Latih Diri 1.10

1. (a) $f^{-1} : x \to \dfrac{x+5}{2}$ (b) $f^{-1} : x \to \dfrac{3}{x}, x \neq 0$
   (c) $f^{-1} : x \to \dfrac{4+x}{x}, x \neq 0$ (d) $f^{-1} : x \to \dfrac{6x}{x-5}, x \neq 5$
   (e) $f^{-1} : x \to \dfrac{8x+9}{x-1}, x \neq 1$ (f) $f^{-1} : x \to \dfrac{x-3}{2x-2}, x \neq 1$
2. (a) $f^{-1}(4) = \dfrac{1}{3}$ (b) $x = -\dfrac{3}{2}, x = 1$
3. $a = -\dfrac{5}{2}, b = \dfrac{1}{8}$
4. (a) $f : x \to \dfrac{x-7}{6}$ (b) $f : x \to 2 - 5x$
   (c) $f : x \to \dfrac{3x}{x-3}, x \neq 3$
5. (a) $k = 2$ (b) $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = -6$

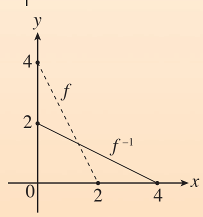
Latihan Intensif 1.3

1. (a) $f(2) = 5$ (b) $g(5) = 8$
   (c) $gf(2) = 8$ (d) $f^{-1}(5) = 2$
   (e) $g^{-1}(8) = 5$ (f) $f^{-1}g^{-1}(8) = 2$
2. (a) Ya (b) Ya
   (c) Tidak
3. (a)



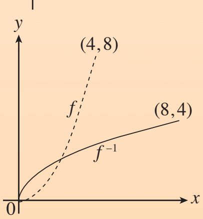
Domain bagi fungsi f^{-1} ialah $0 \leqslant x \leqslant 2$.

(b)



Domain bagi fungsi f^{-1} ialah $0 \leqslant x \leqslant 4$.

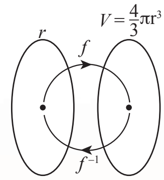
(c)



Domain bagi fungsi f^{-1} ialah $0 \leqslant x \leqslant 8$.

4. (a) $h = 5$ (b) $f^{-1}(3) = 14$
   (c) $m = -9$
5. (a) $h(x) = \dfrac{3x-2}{x}, x \neq 0$ (b) $x = 2$
6. $x = -5, x = 2$
7. (a) $f^{-1}(x) = 220 - \dfrac{20}{17}x$ (b) 173.4

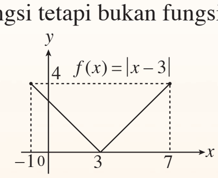
8. (a)



(b) 0.49 cm

LATIHAN PENGUKUHAN

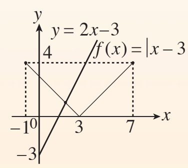
1. (a) (i) 1 (ii) 6, 8, 9
   (b) Ya kerana setiap objek hanya mempunyai satu imej.
   (c) Domain = {2, 6, 7, 8, 9}
   Kodomain = {1, 4, 5}
   Julat = {1, 4}
2. (a) $m = 35$ (b) $h : x \to x^2 - 1$
3. Fungsi tetapi bukan fungsi satu dengan satu.
4. (a)



Julat fungsi f ialah $0 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

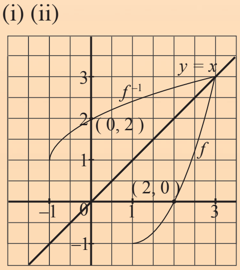
(b) $1 \leqslant x \leqslant 5$

(c)



$x = 2$

5. (a) $h = 7, k = 6$ (b) 43
6. $m = 3, c = -13$
7. (a) (i) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$ (ii) $g(x) = 2x + 5$
   (b) $x = -8$
8. (a) $k = 1$ (b) $m = 2, n = 1$
   (c) $f^2(x) = x$ (d) $f^{-1}(2) = 3$
9. (a) (i) Fungsi selanjar (ii) $-4 \leqslant f(x) \leqslant 4$
   (b) Tiada fungsi songsang
10. (a) Syarat $x \geqslant 0$. (b) $f^{-1}(x) = x, f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{4}}$
11. Graf tidak semestinya bersilang pada garis $y = x$ jika graf bagi suatu fungsi dan songsangannya bersilang. Kedua-dua graf ini mungkin bersilang pada garis yang lain.
12. (a) (i) $f^{-1}(x) = \dfrac{8+5x}{x-1}, x \neq 1$
    (ii) $f^{-1}(x) = \dfrac{-3-4x}{x-2}, x \neq 2$
    (b) $f = f^{-1}$ jika $a = -d$
13. (a) (i) (ii)

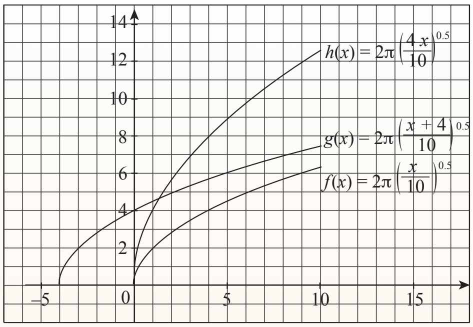


Julat f ialah $-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$ dan domain f^{-1} ialah $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

(b) Julat f = domain f^{-1} dan domain f = julat f^{-1}.
   (i) Ya
   (ii) Ya, mana-mana titik (b, a) di atas graf f^{-1} ialah pantulan titik (a, b) di atas graf f pada garis $y = x$.

14. (a) $C = \dfrac{2\sqrt{100 - p}}{25} + 600$
   (b) RM600.64

15.



Tempoh bandul T bergantung pada panjang bandul, l. Jika panjang bertambah, tempoh ayunannya juga bertambah.

BAB 2 FUNGSI KUADRATIK

Latih Diri 2.1

1. (a) –5.606, 1.606 (b) –1.193, 4.193
   (c) –7.243, 1.243 (d) 0.634, 2.366
   (e) 0.134, 1.866 (f) –0.712, 4.212

2. (a) –1.317, 5.317 (b) –1.366, 0.366
   (c) 0.131, 2.535 (d) –0.425, 1.175
   (e) –0.449, 4.449 (f) 0.275, 2.725

3. (a) 8 cm, 6 cm (b) 8 cm × 5 cm

4. 3

Latih Diri 2.2

1. (a) $x - 8x + 12 = 0$ (b) $x^2 - 3x - 4 = 0$
   (c) $x^2 + 11x + 28 = 0$ (d) $5x^2 + 24x - 5 = 0$

2. $p = 2, q = -9$

3. (a) $5x^2 - 30x + 31 = 0$ (b) $x^2 - 10x - 45 = 0$
   (c) $5x^2 - 14 = 0$ (d) $15x^2 - 10x - 3 = 0$

4. (a) $x^2 - 5x - 2 = 0$ (b) $2x^2 - 5x - 1 = 0$
   (c) $4x^2 - 29x + 1 = 0$ (d) $2x^2 + 29x + 2 = 0$

5. $8x^2 + 36x - 27 = 0$

Latih Diri 2.3

1. (a) $-2 < x < 2$ (b) $2 < x < 8$
   (c) $-2 \leqslant x \leqslant 6$ (d) $x \leqslant -1$ atau $x \geqslant 3$
   (e) $-3 < x < 1$ (f) $\frac{2}{3} < x < 4$

2. $x \leqslant -2$ atau $x \geqslant 8$

Latihan Intensif 2.1

1. 0.059, 5.607

2. (a) $x^2 - 12x + 11 = 0$ (b) 12, 11

3. (a) $19x^2 - 4x - 1 = 0$
   (b) $7x^2 + 160x + 175 = 0$
   (c) $x^2 + 12x + 13 = 0$

4. $k = -14$

5. (a) $r = 1$ (b) $r = -3$
   (c) $r = -2$ atau $r = \frac{1}{16}$

6. $m = 12$; 2, 6

7. 2 dan 4; $k = 8$

8. –12, 12

9. $h = 2, k = -5$

10. $c = \dfrac{64 - 9d^2}{4}$

11. (a) $x \leqslant -\frac{1}{2}$ atau $x \geqslant 1$ (b) $1 \leqslant x \leqslant 4$
   (c) $-4 < x < 4$

12. (a) $m = -1, n = 12$ (b) $m = -20, n = 6$

13. $a = 3, b = -10$

Latih Diri 2.4

1. (a) 12; dua punca nyata dan berbeza
   (b) 0; dua punca nyata yang sama
   (c) –104; tiada punca nyata
   (d) 109; dua punca nyata dan berbeza
   (e) 0; dua punca nyata yang sama
   (f) 49; dua punca nyata dan berbeza

Latih Diri 2.5

1. (a) $p = -\frac{3}{4}$ atau $p = 3$ (b) $p > -\frac{3}{4}$
   (c) $p < \frac{3}{4}$

2. $k < -2$ atau $k > 6$, $k = -2$ atau $k = 6$

3. (a) $h = -4, k = -12$ (b) $c < -16$

4. $k = \frac{5}{4}h$

5. 5 : 4

Latihan Intensif 2.2

1. (a) Dua punca nyata yang sama
   (b) Dua punca nyata dan berbeza
   (c) Tiada punca nyata

2. (a) $k = -4$ atau $k = 8$ (b) $k = -\frac{1}{8}$

3. (a) $r < -3$ atau $r > 5$ (b) $r < \frac{1}{4}$

4. (a) $p < \frac{4}{5}$ (b) $p < -\frac{1}{24}$

5. (a) $k = -\frac{5}{3}$ atau $k = \frac{5}{2}$ (b) $x = -3$

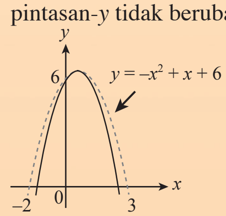
6. $m = 2n - 4$

7. (a) $b = 8, c = 12$ (b) –6, –2

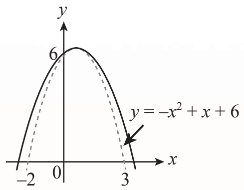
8. (a) $c_1 = 4, c_2 = 5$
   (b) Persamaan tidak mempunyai dua punca nyata

Latih Diri 2.6

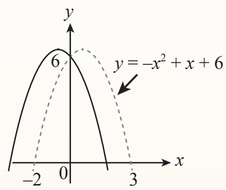
1. (a) (i) Kelebaran graf semakin berkurang, pintasan-y tidak berubah.



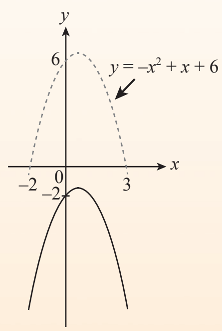
(ii) Kelebaran graf semakin bertambah, pintasan-y tidak berubah.



(b) Verteks berada di sebelah kiri paksi-y. Semua titik berubah kecuali pintasan-y. Bentuk graf tidak berubah.

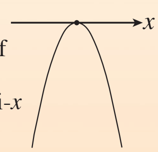


(c) Graf bergerak 8 unit ke bawah. Bentuk graf tidak berubah.

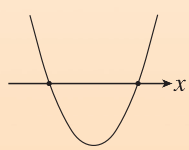


Latih Diri 2.7

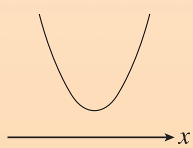
1. (a) Fungsi kuadratik mempunyai dua punca nyata yang sama. Graf ialah satu parabola melalui titik maksimum dan menyentuh paksi-x pada satu titik.



(b) Fungsi kuadratik mempunyai dua punca nyata dan berbeza. Graf ialah satu parabola melalui titik minimum dan menyilang paksi-x pada dua titik.



(c) Fungsi kuadratik tidak mempunyai punca nyata. Graf ialah satu parabola melalui titik minimum dan berada di atas paksi-x.



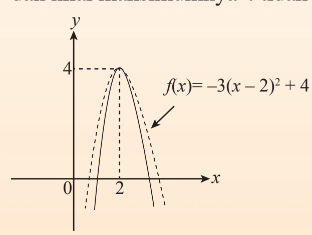
2. (a) $-1, 2$ (b) $1, 5$
3. (a) $q < 7$ (b) $q > -\frac{10}{3}$
4. (a) $r < -\frac{2}{3}$ (b) $r > \frac{4}{3}$

Latih Diri 2.8

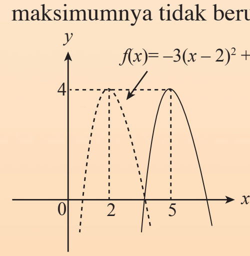
1. $a = 2, p = 1, q = 5$
2. (a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$,
   $f(x) = (x - 1)(x - 3)$
   (b) $f(x) = -4x^2 + 4x + 8$,
   $f(x) = -4(x + 1)(x - 2)$
   (c) $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$,
   $f(x) = 2(x + 4)(x - 2)$
3. Verteks ialah $(-4, -5), f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 13$
4. (a) $a = -1, h = 2, k = 16$
   (b) $f(x) = -x^2 - 4x + 12$
   $f(x) = -(x + 6)(x - 2)$
5. (a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$
   (b) $f(x) = -(x + 1)^2 + 5$
   (c) $f(x) = -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{49}{8}$
   (d) $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{28}{3}$
   (e) $f(x) = -(x - 2)^2 + 16$
   (f) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 18$

Latih Diri 2.9

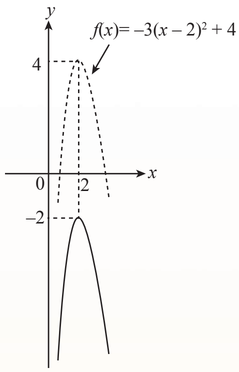
1. (a) Titik maksimum ialah $(2, 4)$ dan persamaan paksi simetri ialah $x = 2$.
   (b) (i) Apabila a berubah dari -3 ke -10, kelebaran graf semakin berkurang. Paksi simetri $x = 2$ dan nilai maksimumnya 4 tidak berubah.



(ii) Apabila h berubah dari 2 ke 5, graf dengan bentuk yang sama bergerak secara mengufuk 3 unit ke kanan. Persamaan paksi simetrinya menjadi $x = 5$ dan nilai maksimumnya tidak berubah iaitu 4.



(iii) Apabila k berubah dari 4 ke -2, graf dengan bentuk yang sama bergerak secara menegak 6 unit ke bawah. Nilai maksimumnya menjadi -2 dan paksi simetrinya tidak berubah.

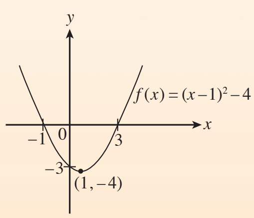


2. (a) $h = 3, k = -3, p = 3$
(b) $x = 5$ (c) -1

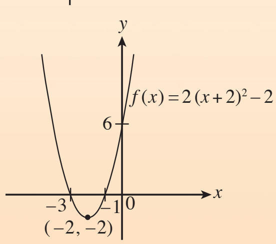
3. (a) Graf bergerak 6 unit ke kanan dengan kelebaran graf bertambah. Persamaan paksi simetri menjadi $x = 6$ dan nilai minimumnya tidak berubah, iaitu 0.
(b) Graf bergerak 1 unit ke kanan dan 5 unit ke atas dengan kelebaran graf berkurang. Persamaan paksi simetri menjadi $x = 1$ dan nilai minimumnya menjadi 5.
(c) Graf bergerak 1 unit ke kiri dan 4 unit ke bawah dengan kelebaran graf bertambah. Persamaan paksi simetri menjadi $x = -1$ dan nilai minimumnya menjadi -4.

Latih Diri 2.10

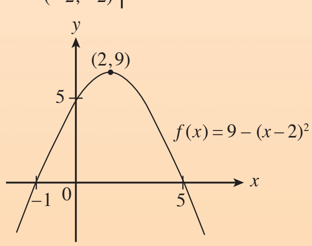
1. (a)



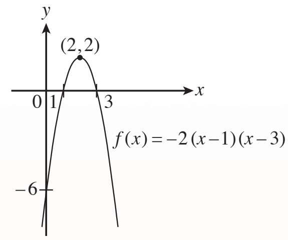
(b)



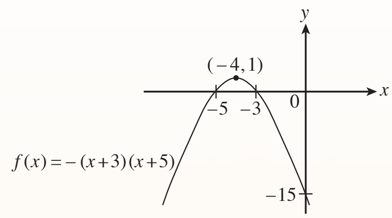
(c)



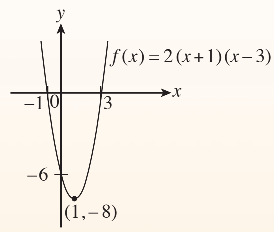
(d)



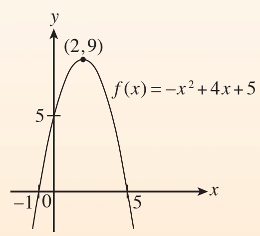
(e)



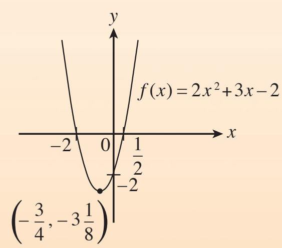
(f)



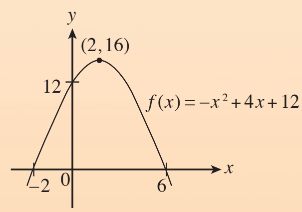
(g)



(h)



(i)



Latih Diri 2.11

1. (a) 4 m (b) 0.8 saat
(c) 7.2 m (d) $0 < t < 2$

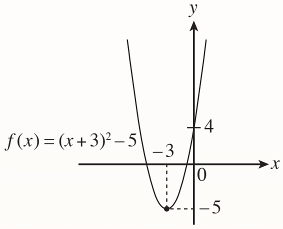
2. (a) 15 m (b) 31.62 m

3. 4 m, 1 m

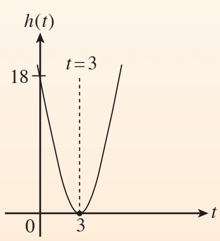
4. (a) 200 m (b) 50 meter

Latihan Intensif 2.3

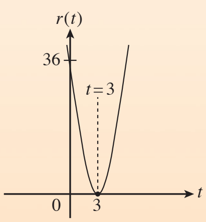
1. (a) $k = -1$ atau $k = 4$ (b) $k > -\dfrac{7}{3}$
2. 5
3. (a) $(x + 3)^2 - 9 + n$ (b) 4
   (c)



4. $-6 < r < -2$, $r = -6$ atau $r = -2$
5. (a) Kelebaran graf berkurang. Paksi simetri graf dan nilai minimumnya tidak berubah.
   (b) Graf dengan bentuk yang sama bergerak secara mengufuk 3 unit ke kanan. Persamaan paksi simetrinya menjadi $x = 4$ dan nilai minimumnya tidak berubah, iaitu 2.
   (c) Graf dengan bentuk yang sama bergerak secara menegak 3 unit ke atas. Nilai minimumnya menjadi 5 dan paksi simetrinya tidak berubah, iaitu $x = 1$.
6. (a)



   (b)



   (c) Graf fungsi $h(t)$ dengan nilai $a = 2$ lebih lebar daripada graf $r(t)$ dengan nilai $a = 4$. Maka, burung yang diwakili oleh fungsi $r(t)$ bergerak pada kedudukan tertinggi, iaitu 36 m dari paras air berbanding burung yang diwakili oleh fungsi $h(t)$ dengan 18 m.
7. $p = 3$, $q = 7$
8. (a) $b = -1$ (b) $c > 2$
   (c) $c = 4$
9. (a) 4 saat (b) 64 m
10. (a) (i) α (ii) β
    (iii) $-\alpha\beta$ (iv) $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$
    (b) $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ ialah koordinat-x bagi titik maksimum graf dan $-\alpha\beta$ ialah pintasan-y bagi graf tersebut.

LATIHAN PENGUKUHAN

1. -0.816, 3.066
2. (a) $x^2 - 8x + 13 = 0$ (b) 8, 13
   (c) Dua punca nyata dan berbeza
3. (a) $k = -8, 4$ (b) $k < -8$, $k > 4$
   (c) $k \leqslant -8$, $k \geqslant 4$
4. (a) $p = 2$ (b) $p = -1$
5. $h : k = 7 : 6$; $x = 1$
6. $x < 2$ atau $x > 5$, $0 \leqslant x \leqslant 7$; $0 \leqslant x < 2$ atau $5 < x \leqslant 7$
7. (a) 3, 7 (b) $p = -5$, $q = -12$
   (c) $x = 5$ (d) $3 < x < 7$
8. (a) $b = -8$, $c = 12$ (b) $(4, -4)$
   (c) $2 < x < 6$ (d) 4
9. 9 km/j
10. 67.229 unit
11. (a) 20 unit (b) 20 unit
12. (a) $y = -\dfrac{1}{18}(x - 3)^2 + 2.5$
    (b) 9.708 m

BAB 3 SISTEM PERSAMAAN

Latih Diri 3.1

1. $3x + 2y + z = 750$
2. (a) Ya, kerana ketiga-tiga persamaan mempunyai tiga pemboleh ubah, m, n dan p dengan kuasa pemboleh ubah bernilai 1. Persamaan mempunyai nilai n sifar.
   (b) Bukan, kerana terdapat persamaan yang mempunyai kuasa pemboleh ubah bernilai 2.
   (c) Ya, kerana ketiga-tiga persamaan mempunyai tiga pemboleh ubah, a, b dan c, dengan kuasa pemboleh ubah bernilai 1.

Latih Diri 3.2

1. (a) $x = 1, y = 3, z = 2$ (b) $x = -1, y = 2, z = 3$
2. (a) $x = -1, y = 3, z = -1$
   (b) $x = -\dfrac{28}{3}, y = 8, z = \dfrac{16}{3}$

Latih Diri 3.3

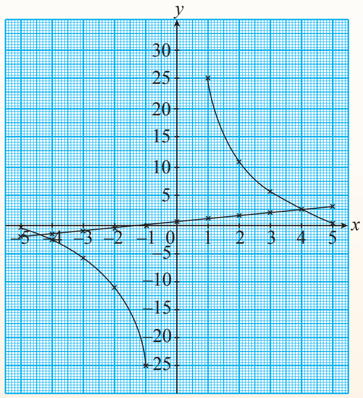
1. P = RM8 000, Q = RM2 000, R = RM14 500
2. Teluki = 80, mawar = 50, daisi = 70
3. Pen = 3, pensel = 5, buku nota = 8

Latihan Intensif 3.1

1. (a) $x + y + z = 180$, $x - 20 = y + z$, $x - 10 = 3z$; $100°, 50°, 30°$
   (b) $x + y + z = 19$, $2x + y + z = 22$
   $x + 2y + z = 25$; 3, 6, 10
2. (a) $x = 2, y = 1, z = 0$ (b) $x = 3, y = 2, z = 1$
   (c) $x = 5, y = -3, z = 1$ (d) $x = \dfrac{8}{5}, y = -\dfrac{44}{5}, z = -6$
   (e) $x = -1, y = 3, z = 1$ (f) Tiada penyelesaian
3. Mentega = 500, coklat = 750, kelapa = 900
4. Kecil = 9, sederhana = 6, besar = 3
5. Ayam = 20, arnab = 10, itik = 20

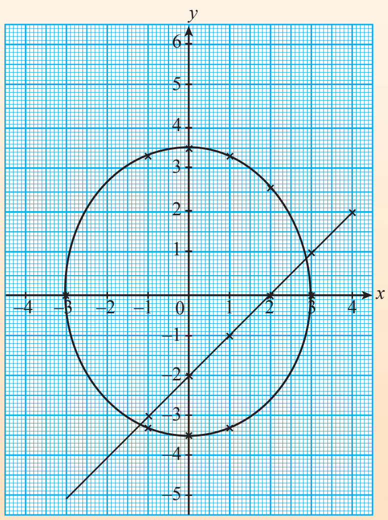
Latih Diri 3.4

1. (a) $x = 19, y = 31$ dan $x = 2, y = -3$
   (b) $x = -\frac{7}{3}, y = \frac{2}{3}$ dan $x = -4, y = 1$
   (c) $x = 3.581, y = -0.5811$ dan $x = 0.4189, y = 2.581$
   (d) $x = 7, y = -4$ dan $x = -\frac{14}{3}, y = 3$
   (e) $x = \frac{13}{4}, y = \frac{5}{8}$ dan $x = \frac{7}{2}, y = \frac{1}{2}$
   (f) $x = 3, y = 1$ dan $x = -3, y = 7$
2. (a)



   $(-4.3, -1.7)$ dan $(4.0, 2.5)$

   (b)



   $(-1.2, -3.2)$ dan $(2.9, 0.9)$

Latih Diri 3.5

1. 8 cm, 9 cm
2. $x = 8$ cm, $y = 6$ cm atau $x = 6$ cm, $y = 4$ cm

Latihan Intensif 3.2

1. (a) $x = 5, y = 3$ dan $x = -6, y = -\frac{2}{3}$
   (b) $k = 3.732, p = 1.577$ dan $k = 0.2678, p = 0.4226$
2. $\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$ dan $(3, -3)$
3. $h = -2, k = \frac{1}{2}$; $x = 1, y = -4$
4. $x = 5, y = 7$
5. 35.852 cm^3 atau 36 cm^3
6. $(-1, 0)$ dan $\left(-\frac{17}{29}, \frac{4}{29}\right)$
7. $(-1, -2)$ dan $\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$

LATIHAN PENGUKUHAN

1. (a) $x + 2y + 3z = 120, 2x + 3y + 2z = 110$
   $x + 4y + 2z = 180$
   (b) $x + y + z = 30, 10x + 20y + 50z = 2\,060$,
   $x - 3y - 2z = 25$
2. (a) $x = -2, y = 1, z = 3$
   (b) $x = -1, y = 2, z = -4$
3. $x = 15, y = 110, z = 55$
4. $h = 2$; $x = -\frac{1}{7}, y = \frac{2}{7}$
5. RM 13 166.67, RM 6 666.67, RM166.66
6. 8 m, 15 m dan 17 m
7. Ya, garis itu menyilang lengkung itu pada titik lain, iaitu $x = \frac{5}{2}, y = \frac{9}{2}$
8. 48 cm^2
9. 4.5 m, 5.5 m
10. $x = \frac{2}{3}, y = 12$ dan $x = \frac{1}{3}, y = 24$
11. Diameter = 7 m, jejari = $\frac{7}{2}$ m; Diameter = $\frac{28}{9}$ m, jejari = $\frac{14}{9}$ m

BAB 4 INDEKS, SURD DAN LOGARITMA

Latih Diri 4.1

1. (a) 5^{5x} (b) $\frac{1}{7^5} - \frac{1}{7^3}$
   (c) $9^a(9^{-5} + 9^2)$ (d) c^7d^8
   (e) x^6y^{11} (f) $\frac{xy^3}{49^5}$
   (g) $27x^2y$ (h) $p^{10}q^3$
   (i) p^7q^{20} (j) $\frac{x^5y^5}{7^{10}}$
   (k) $\frac{5y^6}{x^{10}}$ (l) $\frac{a^4b^2}{6}$
2. (a) $\frac{2}{a^{\frac{1}{6}}}$ (b) $4a^{\frac{18}{5}}$
   (c) $\frac{1}{a^{\frac{17}{20}}}$ (d) $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^3} - \frac{3}{a^4}$

Latih Diri 4.2

1. (a) $x = -11$ (b) $x = -2$
   (c) $x = -3$
2. (a) 10 cm (b) 3.487 cm

Latihan Intensif 4.1

1. (a) $\dfrac{y^3z^2}{x}$ (b) $\dfrac{xz^3}{y}$
(c) $4x^{12}\,y^{16}$ (d) $e^5\,f^4$
(e) $\dfrac{7y^9}{x^5}$ (f) $\dfrac{x^3y^5}{7^8}$

2. $x = 7$

3. $x = 4$

4. $m = 1$

5. $-\dfrac{1}{2} \to -2 \to -\dfrac{2}{3} \to \dfrac{3}{10} \to 2 \to 3 \to -1 \to -3 \to -3$

6. (a) 5 904 900 (b) 5 minit

7. 79 570 057

8. RM51 874.85

Latih Diri 4.3

1. (a) $\dfrac{26}{33}$ (b) $3\dfrac{19}{33}$
(c) $\dfrac{115}{333}$ (d) $13\dfrac{21}{37}$

2. (a) Surd kerana menghasilkan perpuluhan tidak berulang.
(b) Surd kerana menghasilkan perpuluhan tidak berulang.
(c) Bukan surd kerana menghasilkan perpuluhan berulang.
(d) Surd kerana menghasilkan perpuluhan tidak berulang.

Latih Diri 4.4

1. (a) $\sqrt{6}$ (b) $\sqrt{15}$
(c) $\sqrt{9}$ (d) $\sqrt{30}$
(e) $\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ (f) $\sqrt{6}$
(g) $\sqrt{4}$ (h) $\sqrt{10}$

Latih Diri 4.5

1. $\sqrt{260} = 2\sqrt{65}$, $(\sqrt{16}\,\sqrt{36})^2 = 576$,
$\dfrac{4\sqrt{8}}{2\sqrt{4}} = 2\sqrt{2}$, $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = 5$, $\dfrac{30\sqrt{27}}{6\sqrt{3}} = 15$
$(\sqrt{81})^2 = 81$

2. (a) $2\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{3}$
(c) $2\sqrt{7}$ (d) $4\sqrt{2}$
(e) $3\sqrt{5}$ (f) $4\sqrt{3}$
(g) $3\sqrt{6}$ (h) $6\sqrt{3}$

Latih Diri 4.6

1. (a) $8\sqrt{5}$ (b) $12\sqrt{5}$
(c) $2\sqrt{7}$ (d) -12
(e) $4\sqrt{5} + 25$ (f) $3\sqrt{7} - 35$
(g) $87 + 35\sqrt{3}$ (h) $20\sqrt{7} - 154$
(i) -133

2. (a) Surd tak serupa (b) Surd serupa
(c) Surd serupa (d) Surd tak serupa
(e) Surd serupa

Latih Diri 4.7

1. (a) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (b) $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$
(c) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ (d) $\dfrac{1}{4}$
(e) $\dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{1}{2}$ (f) $\dfrac{15 + 3\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + \sqrt{10}}{20}$
(g) $\dfrac{16 + \sqrt{3}}{23}$
(h) $\dfrac{65 + 16\sqrt{2} - 11\sqrt{3}}{46}$
(i) $\dfrac{45 - 33\sqrt{5} - 20\sqrt{3}}{55}$

Latih Diri 4.8

1. $\sqrt{39}$ cm

2. (a) $\dfrac{17}{2}$ cm^2 (b) $\sqrt{66}$ cm

3. $13 + 4\sqrt{3}$

4. (a) $x = -2$ (b) $\dfrac{5}{8}$
(c) $\dfrac{1}{4}$

Latihan Intensif 4.2

1. (a) $\sqrt{55}$ (b) $\sqrt{70}$
(c) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (d) $\sqrt{6}$

2. (a) $2\sqrt{6}$ (b) $9\sqrt{2}$
(c) $3\sqrt{2}$ (d) $\dfrac{4}{3}\sqrt{4}$

3. (a) $8\sqrt{10}$ (b) $5\sqrt{11}$
(c) $11\sqrt{13}$ (d) $8\sqrt{5}$
(e) $9\sqrt{3} - 6\sqrt{2}$ (f) $3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$
(g) $105\sqrt{3}$ (h) $24\sqrt{30}$
(i) $-\sqrt{3}$ (j) $3\sqrt{7} + 49$
(k) $7\sqrt{5} - 25$ (l) $114 + 24\sqrt{7}$
(m) $-154 - 20\sqrt{7}$ (n) $146 - 50\sqrt{5}$
(o) 4 (p) $\dfrac{1}{3}$
(q) $\sqrt{2}$ (r) 6

4. (a) $5\sqrt{5} + 7\sqrt{3} - 7\sqrt{7}$
(b) $3\sqrt{5} + 5\sqrt{3} + 18\sqrt{2}$
(c) $13\sqrt{5} + 21\sqrt{3} - 14\sqrt{7}$
(d) $11\sqrt{5} + 17\sqrt{3} - 7\sqrt{7} + 36\sqrt{2}$

5. (a) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (b) $3 + \sqrt{5}$
(c) $-\dfrac{(1 + \sqrt{5})}{3}$ (d) $\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(e) $\dfrac{17 + 7\sqrt{5}}{4}$ (f) $\dfrac{-5 + \sqrt{21}}{2}$

6. (a) -1 (b) $\dfrac{3\sqrt{7} - \sqrt{2}}{5}$

(c) $\dfrac{12 + \sqrt{3}}{13}$

7. $(2\sqrt{5} - \sqrt{2})$ cm

8. (a) $\dfrac{1 + 5\sqrt{2}}{7}$ (b) $\dfrac{7 + 7\sqrt{2}}{2}$ cm^2

Latih Diri 4.9

1. (a) $\log_3 81 = 4$ (b) $\log_2 128 = 7$
(c) $\log_5 125 = 3$ (d) $\log_6 216 = 3$

2. (a) $10^4 = 10\ 000$ (b) $10^{-4} = 0.0001$
(c) $2^7 = 128$ (d) $4^3 = 64$

3. (a) 0.9542 (b) 1.996
(c) –0.2375 (d) 6
(e) 4 (f) 4
(g) 5

4. (a) $x = 32$ (b) $x = 512$
(c) $x = 256$

5. (a) 138.78 (b) 24.68
(c) 5568.01 (d) 0.0004052
(e) –0.002706 (f) 0.00002783

Latih Diri 4.10

1. (a) 0.115 (b) 1.712
(c) 2.366 (d) –0.712

2. (a) 3 (b) 2
(c) 2

Latih Diri 4.11

1. (a) $\log_2 xy^2$ (b) $\log_b \left(\dfrac{x}{y^3}\right)$
(c) $\log_2 xy^3$ (d) $\log_4 \left(\dfrac{16\sqrt{x}}{y^3}\right)$
(e) $\log_3 m^3n^2$

2. (a) $1 + q$ (b) $2p + q$
(c) $\dfrac{1}{2}(p + q)$

Latih Diri 4.12

1. (a) 2.8137 (b) 0.1550
(c) 1.7959 (d) –0.1475

2. (a) 2.7833 (b) 2.6309
(c) 1.9820

3. (a) $\dfrac{2}{t}$ (b) $\dfrac{3t}{2}$
(c) $\dfrac{2 + t}{t}$ (d) $\dfrac{2 - 2t}{t}$

4. (a) $\dfrac{2a + 3b}{2}$ (b) $\dfrac{a - 2b}{3}$
(c) $\dfrac{3 + b}{a + b}$

Latih Diri 4.13

1. (a) 1.677 (b) 2.399
(c) 1.011

2. (a) 653803.075 (b) –0.712
(c) 1.982 (d) 18.866
(e) 1.792 (f) 6.389, –8.389

3. 2 tahun

4. 11 tahun

5. 3 tahun

6. 5.543 km

Latihan Intensif 4.3

1. $\log_5 1 = 0$, $\log_7 75 = 2.219$

2. $2x + y - 3$

3. 2

4. $\dfrac{4}{3}$

6. $2p - m - 1$

7. $\log_2 \left(2 + \dfrac{1}{x}\right)$

8. $y = 2x$

9. $\dfrac{1}{2}(3 + x - y)$

10. (a) 10^{-12} Watt (b) 31 : 25
(c) 140 desibel

11. (a) 2 500 000 (b) 3 729 561
(c) Tahun 2095

Latih Diri 4.14

1. 3 minggu 2 hari

2. (a) 32 amp
(b) (i) 8 amp (ii) 2 amp
(c) 3 saat

Latihan Intensif 4.4

1. (a) RM1 538.62 (b) 2.116 tahun

2. (a) 50 gram (b) 13219.2810 tahun

3. (b) 6.93 jam

LATIHAN PENGUKUHAN

1. $x = 0.4194$

2. $n = 2$

3. $\dfrac{\sqrt{35} + \sqrt{21}}{2}$

4. $t = 0$

5. $\dfrac{8}{12 + 8\sqrt{2}}$

6. (a) 59.05°C (b) 2.12 saat

7. 9 tahun

8. $\dfrac{3}{2s} + \dfrac{2}{t}$

9. $x = \dfrac{5}{2}, y = 2$

10. 21.85 tahun

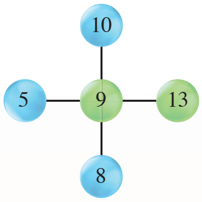
BAB 5 JANJANG

Latih Diri 5.1

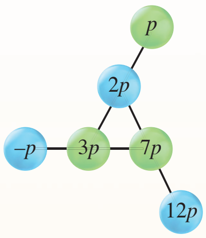
1. (a) 14, tambah 14 kepada sebutan sebelumnya.
(b) $3\sqrt{3}$, tambah $3\sqrt{3}$ kepada sebutan sebelumnya.
(c) $(p - q)$, tambah $(p - q)$ pada sebutan sebelumnya.
(d) $\log_a 2^3$, tambah $\log_a 2^3$ kepada sebutan sebelumnya.

2. (a) Janjang aritmetik
(b) Bukan janjang aritmetik
(c) Bukan janjang aritmetik
(d) Janjang aritmetik

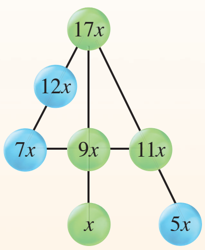
3. (a)



(b)



(c)



4. Janjang aritmetik.

Latih Diri 5.2

1. $-23 \to -12 \to -3 \to -0.4 \to 25 \to -14$

2. (a) 37 tahun (b) RM1 500

Latih Diri 5.3

1. (a) 1 000 (b) $165\frac{3}{5}$

2. Melintang
(a) 72 (b) 28 700
(c) 300
Menegak
(c) 31 570 (d) 22
(e) 30 100

3. 451 unit

4. (a) 14 panel, 4 batang kayu yang tinggal
(b) Kelabu, 27 kepingan kayu

Latih Diri 5.4

1. (a) 21 hari (b) 20 buah

2. (a) 2 cm (b) 2 cm

Latihan Intensif 5.1

1. (a) Janjang aritmetik
(b) Bukan janjang aritmetik

2. (a) 12 (b) –9

3. (a) 12 (b) 14

4. (a) 425 (b) $4n[3n - 13]$
(c) 1 225

5. (a) –3 (b) 29
(c) 85

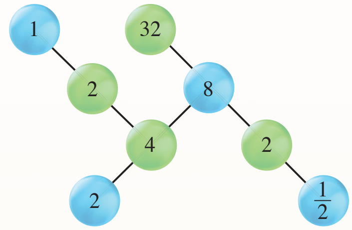
6. (a) –1 (b) $-\frac{23}{2}$

7. Syarikat B, RM2 400

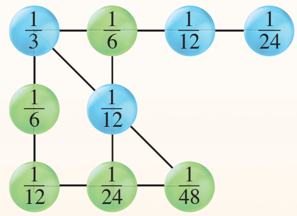
Latih Diri 5.5

1. (a) Janjang geometri
(b) Janjang geometri
(c) Bukan janjang geometri

2. (a)



(b)



3. $x = 3$
Tiga sebutan pertama : 1, 4, 16 ; $r = 4$

Latih Diri 5.6

1. $\frac{243}{4} \to 3 \to 7 \to \frac{4}{5} \to \frac{1}{768} \to \frac{625}{12} \to 0.01$

2. Lantunan ke-23

Latih Diri 5.7

1. (a) 81.9 (b) $\frac{p[p^{22} - 1]}{p^2 - 1}$
(c) 3 587 226.5

2. 4

3. (b) 1 365

Latih Diri 5.8

1. (a) 2 250 (b) RM30 000
(c) 2 240 (d) 53

Latih Diri 5.9

1. (a) 400 cm (b) 8 m

2. (a) Jujukan lilitan: $\pi j, \pi j(1.4), \pi j(1.4)^2, \ldots$
(b) 24.28 m

Latihan Intensif 5.2

1. (a) $n = 8, S_n = 1\,640$ (b) $n = 7, S_n = \log x^{-127}$
(c) $n = 9, S_n = \frac{6}{11}$ (d) $n = 7, S_n = 5\frac{61}{64}$

2. 9

3. (a) $-\frac{1}{2}, 3$ (b) 512

4. (a) $r = \frac{1}{2}, a = 144 \text{ cm}^2$ (b) 71.72 cm^2

5. (a) $\frac{1}{3}$ (b) 351 cm

6. $r = \frac{1}{2}, T_2 = 7.25$ kg

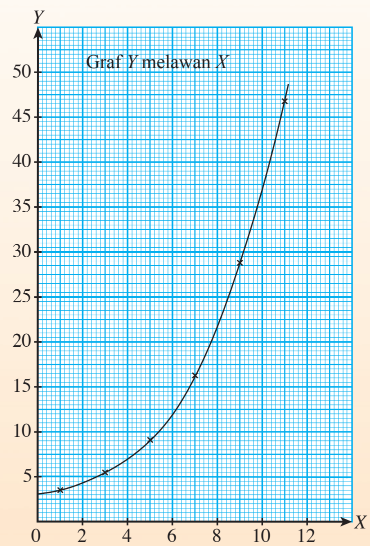
LATIHAN PENGUKUHAN

1. (a) 13 (b) −18
2. 3
3. (a) 4 cm^3 (b) 324 cm^3
4. (a) $a = 120, r = \frac{1}{2}$ (b) 240
5. (a) 56 buah (b) 572 buah
6. (a) Simpanan sebanyak RM30 000 dapat dicapai.
   (b) Wang simpanan tidak mencapai RM30 000.
7. (a) 3 (b) RM5 460

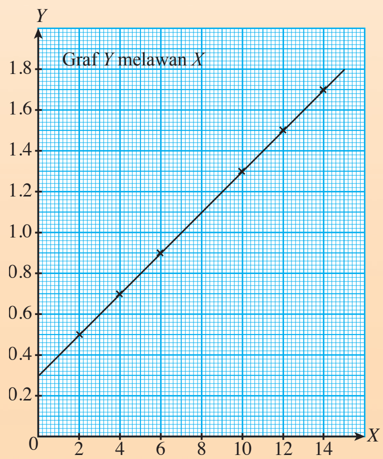
BAB 6 HUKUM LINEAR

Latih Diri 6.1

1. Graf hubungan linear ialah Rajah 1(b). Graf Rajah 1(a) mewakili hubungan tak linear kerana bentuk graf yang diperoleh ialah lengkung manakala graf Rajah 1(b) mewakili hubungan linear kerana satu garis lurus diperoleh.
2. (a)



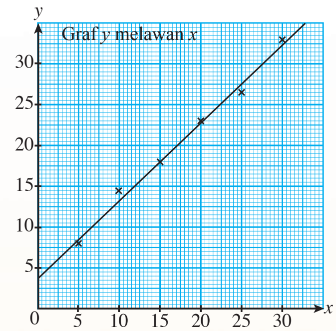
(b)



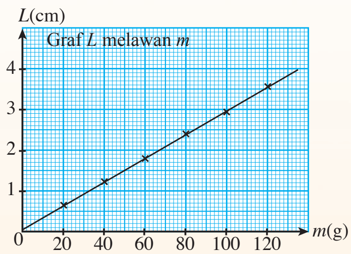
Graf (b) yang berbentuk garis lurus ialah graf hubungan linear.

Latih Diri 6.2

1.

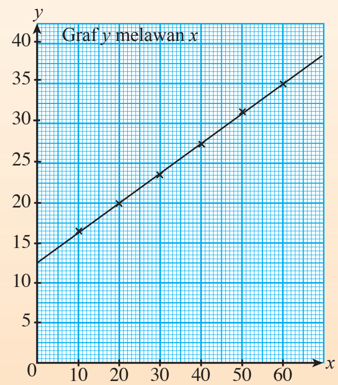


2.



Latih Diri 6.3

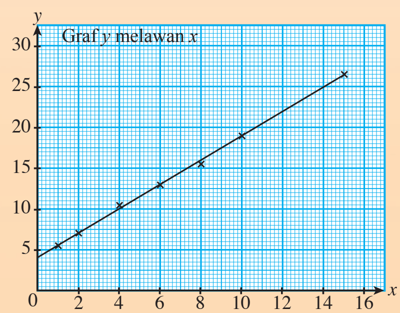
1. $t = \frac{29}{16}x + \frac{1}{50}$
2. (a)



(b) Pintasan-y = 12.5, kecerunan = 0.375
(c) $y = 0.375x + 12.5$

Latih Diri 6.4

1. (a)

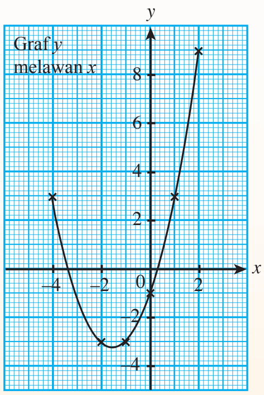


(b) (i) Pintasan-y = 4.0
(ii) $y = 22$
(iii) Kecerunan $= \frac{3}{2}$
(iv) $x = 7.4$

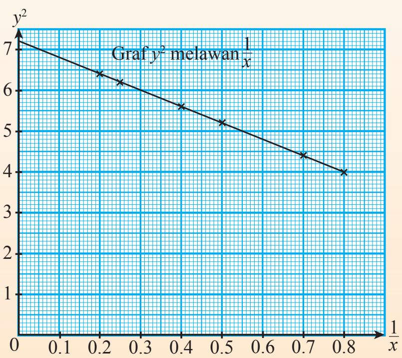
(c) $y = \frac{3}{2}x + 4$; $y = 46$

Latihan Intensif 6.1

1. (a)

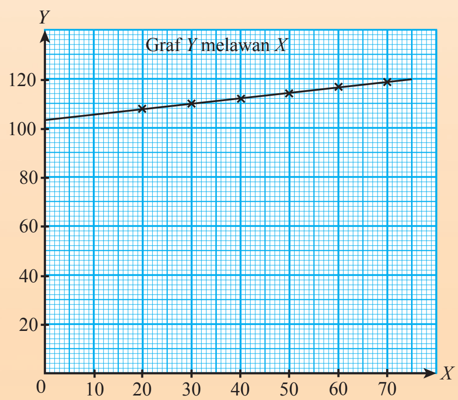


(b)



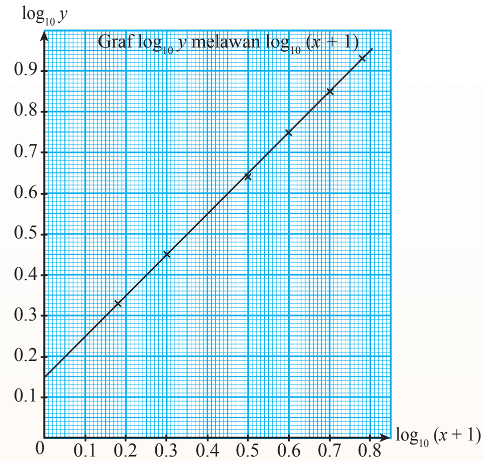
Graf (a) ialah graf tak linear manakala graf (b) ialah graf linear. Bentuk graf (a) ialah lengkung manakala bentuk graf (b) ialah garis lurus.

2.



$Y = \frac{11}{50}X + \frac{518}{5}$

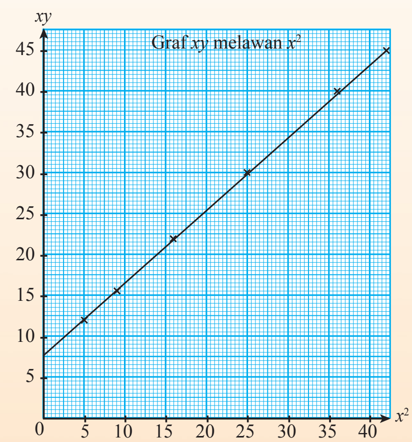
3. (a)



(b) (i) $m = 1$
(ii) 0.15
(iii) 1.512

(c) (i) 4.944
(ii) 0.0619

4. (a)



(b) (i) $m = \frac{33}{37}$
(ii) 7.5
(iii) 10
(iv) 5.2

(c) $x = 10.18$

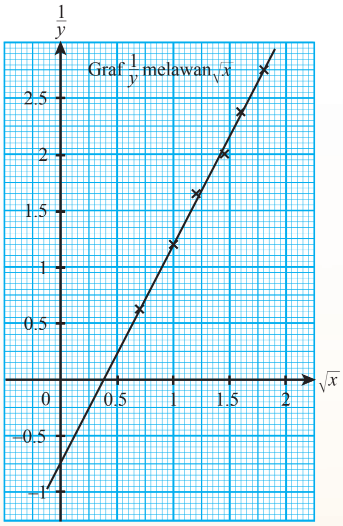
Latih Diri 6.5

1. (a) $Y = \frac{y}{x^2}$, $X = \frac{1}{x^2}$, $m = -q$, $c = p$

(b) $Y = \frac{y}{x}$, $X = x$, $m = h$, $c = 1$

(c) $Y = yx^2$, $X = x^2$, $m = q$, $c = p$

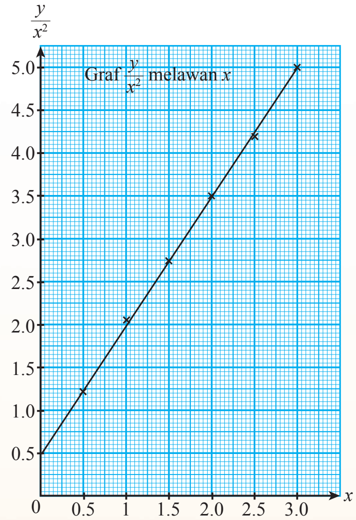
2. (a)



(b) (i) $q = -0.75$ (ii) $p = \frac{31}{16}$

(iii) $y = \frac{5}{7}$

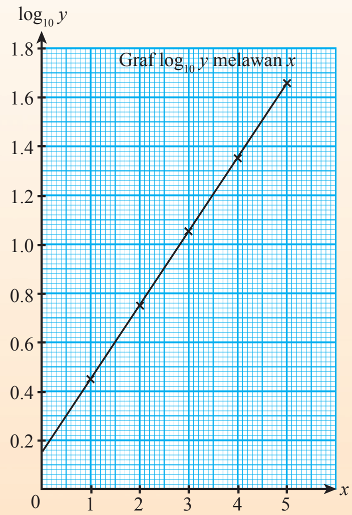
(b)



(c) $a = 1.504$
$b = 0.5$

3. (a) $\log_{10} y = b \log_{10} a + x \log_{10} a$

(b)



(c) $a = 2.011$
$b = 0.5275$

Latihan Intensif 6.2

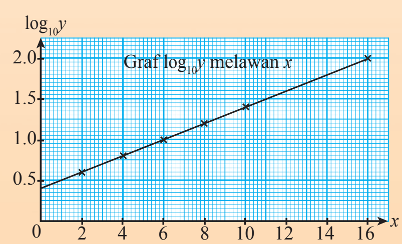
1.

	Tak linear	Linear	Paksi-Y	Paksi-X	Kecerunan, m	pintasan-Y, c
(a)	$y = 5x^2 + 3x$	$\frac{y}{x^2} = 5 + \frac{3}{x}$	$\frac{y}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	3	5
(b)	$y = p\sqrt{x} + \frac{q}{\sqrt{x}}$	$y\sqrt{x} = px + q$	$y\sqrt{x}$	x	p	q
(c)	$y = ax^b$	$\log_{10} y = \log_{10} a + b \log_{10} x$	$\log_{10} y$	$\log_{10} x$	b	$\log_{10} a$
(d)	$x = mxy + ny$	$\frac{x}{y} = mx + n$	$\frac{x}{y}$	x	m	n
(e)	$yp^x = q$	$\log_{10} y = -\log_{10} px + \log_{10} q$	$\log_{10} y$	x	$-\log_{10} p$	$\log_{10} q$
(f)	$y(b - x) = ax$	$\frac{x}{y} = -\frac{x}{a} + \frac{b}{a}$	$\frac{x}{y}$	x	$-\frac{1}{a}$	$\frac{b}{a}$

2. (a) $\frac{y}{x^2} = ax + b$

Latih Diri 6.6

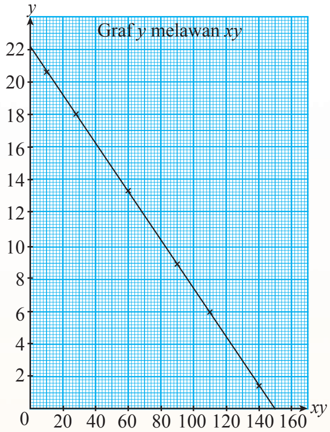
1. (a)



(b) (i) $p = 2.512$
(ii) $q = 1.259$

(c) $y = 7.943$

2. (a)



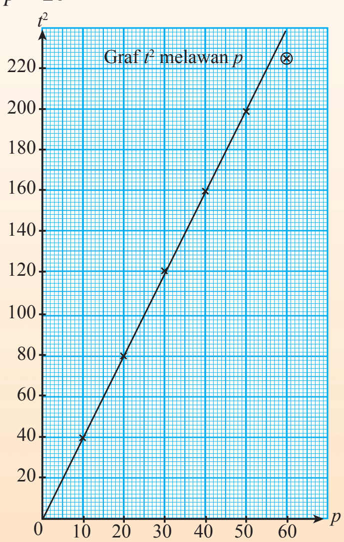
(b) $a = -150.31$
$b = -6.771$

(c) Kecerunan = 0.006690, pintasan-Y = 0.04530

Latihan Intensif 6.3

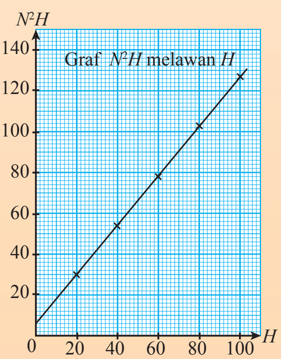
1. (a) $p = 10$
(b) $p = 20$

2. (a)



(b) $t = 15.5$
(c) $k = 2$

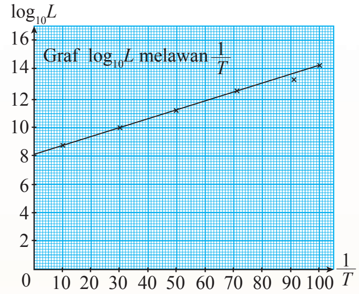
3. (a)



(b) $a = 2.425$
$b = 12$

(c) $N = 1.3416$
(d) 20 orang pekerja

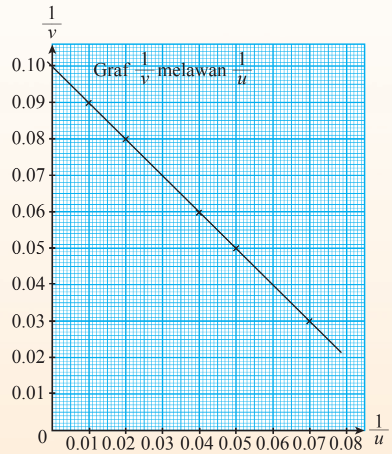
4. (a)



(b) (i) $A = 1.585 \times 10^8$
(ii) $b = 0.1258$

(c) 221.7°C

5. (a)



(b) (i) $v = \dfrac{-10u}{10 - u}$ (ii) 10

LATIHAN PENGUKUHAN

1. (a) $yx^2 = 3x^3 + 4, \dfrac{y}{x} = 3 + \dfrac{4}{x^3}$

(b) $\dfrac{y}{x^2} = px + q, \dfrac{y}{x^3} = p + \dfrac{q}{x}$

(c) $xy = p + \dfrac{q}{p}x^2, \dfrac{y}{x} = \dfrac{p}{x^2} + \dfrac{q}{p}$

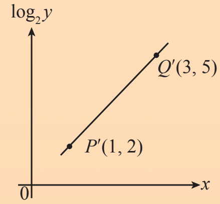
(d) $\log_{10} y = \log_{10} p + \sqrt{x}\log_{10} k$
(e) $\log_{10} y = \log_{10} p + (x - 1)\log_{10} k$
(f) $\log_{10} y = x^2 \log_{10} k - \log_{10} p$

2. (a) $\dfrac{y}{x} = px + q$ (b) $p = -0.25, q = 5.25$

3. $p = 100, q = 100$

4. $k = -1, h = \dfrac{2}{3}$

5. (a)



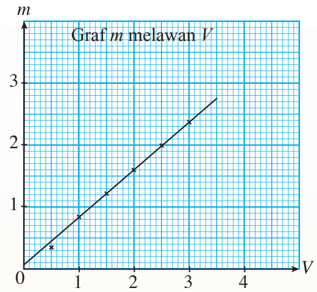
$P'(1, 2), Q'(3, 5)$

(b) $a = 1.414, b = 2.828$

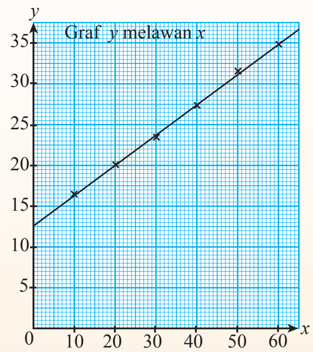
6. (a) $y = \dfrac{8x + 3}{x^2}$

(b) $y = 0.8850$

7.

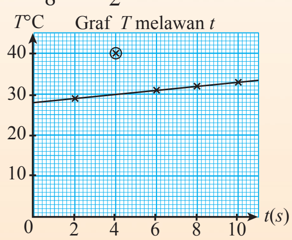


8. (a)



(b) $y = \dfrac{3}{8}x + \dfrac{25}{2}$

9. (a)

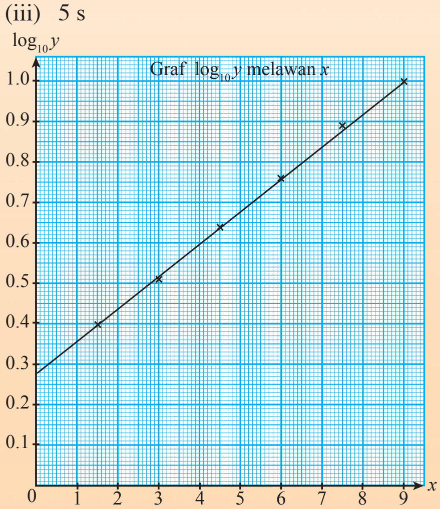


(b) 30.0

(c) (i) 28°C (ii) 32.5°C

(iii) 5 s

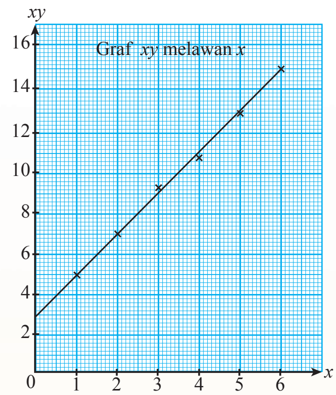
10. (a)



(b) (i) $s = 1.905$ (ii) $t = 1.202$

(iii) $x = 4$

11. (a)



(b) (i) $p = 4$ (ii) $q = 6$

(iii) $y = 2.857$

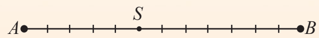
(c) $x = 0.0625$

BAB 7 GEOMETRI KOORDINAT

Latih Diri 7.1

1. (a) Titik P membahagi tembereng garis AB dengan nisbah 1 : 2.
Titik Q membahagi tembereng garis AB dengan nisbah 1 : 1.
Titik R membahagi tembereng garis AB dengan nisbah 11 : 1.

(b)



2. (a) $m = 2, n = 5$

(b) P membahagi tali AB dengan nisbah 2 : 5.

(c) $P(6, 0)$

Latih Diri 7.2

1. (a) $P(-3, 4)$ (b) $P(-2, 1)$

(c) $P(3, -1)$

2. $p = -2t$

3. (a) $C(4,4)$ (b) $D(2,1)$

4. (a) $1 : 2, k = -2$ (b) $1 : 1, k = 5$

(c) $1 : 4, k = 7$ (d) $2 : 3, k = 2$

Latih Diri 7.3

1. (28, 32)

2. (–1, 4), (2, 3)

3. (a) 2 : 1 (b) 5 unit

Latihan Intensif 7.1

1. $R(6, 4)$

2. (a) $Q(11, -2)$ (b) $\left(\dfrac{15}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

3. $h = 7, k = 1$

4. $e = 10f$

5. (a) $U(5, -4)$ (b) $\left(8, -\dfrac{3}{2}\right)$

(c) 3 : 1 (d) 5 unit

6. (a) 1 : 3 (b) –1

7. $\left(\dfrac{17}{2}, 4\right)$

Latih Diri 7.4

1. (a) Selari (b) Selari
   (c) Serenjang (d) Serenjang
2. (a) $-\dfrac{1}{6}$ (b) 2
3. (a) 3 (b) 6
4. 8

Latih Diri 7.5

1. $3y - 2x = 20$
2. (a) $(5, 5)$ (b) 3.606 unit

Latihan Intensif 7.2

1. (a) Selari (b) Serenjang
2. 3
3. (a) $3y + 2x = 23$ (b) $2y - 3x = 11$
   $S(1, 7)$
4. (a) -9 (b) 17
5. $h = -2$
6. (a) $2y + x = 10,\ y = 2x$ (b) $C(2, 4)$, 4.472 unit
7. (a) AB ialah $3y - x = 5$
   DE ialah $y + 3x = 15$
   (b) $E(4,3), B(7,4)$
8. (a) AB dan CD adalah selari, AB dan AD berserenjang, CD dan AD berserenjang.
   (b) $2y = x + 9$
   (c) $y + 2x - 22 = 0$
9. (a) (i) $3y + 2x = 19$ (ii) $B(8, 1)$
   (b) (i) $D(2, 5)$
11. $2y + x = 17$

Latih Diri 7.6

1. (a) 24 unit^2 (b) 12 unit^2
   (c) $28\frac{1}{2}$ unit^2
2. $(5, 0), \left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$
4. $p = 1$
5. (a) $-3, \dfrac{11}{3}$ (b) 1, 21
   (c) $-5, 7$ (d) $-7, 3$

Latih Diri 7.7

1. (a) 52 unit^2 (b) $88\frac{1}{2}$ unit^2
   (c) 19 unit^2 (d) $27\frac{1}{2}$ unit^2
2. $k = -4$

Latih Diri 7.8

1. $46\frac{1}{2}$ unit^2
2. 30 unit^2

Latih Diri 7.9

1. (a) $C(7, 8), M(2, 4)$ (b) $1 : 4$
2. (a) $k = 2$ (b) $P(3,2)$
3. (a) $13\frac{1}{2}$ unit^2 (b) $k = 1$
   (c) $E(7, -4)$ (d) 27 unit^2

Latihan Intensif 7.3

1. (a) $D(-2, 10), E(-1, 4)$ (b) 50 unit^2
2. (a) $h = -2, k = -1$ (b) 20 unit^2
3. (a) 0
   (b) Titik A, B dan C adalah segaris.
4. $47\frac{1}{2}$ unit^2
5. 5, 37
6. 1, 5
7. (a) 20 (b) 14, 26
8. (a) $k = 7$
   (b) (i) $H(3, 11)$ (ii) $1 : 2$
9. (a) $m = 2$ (b) 17 unit^2
10. (a) 1.1402 km (b) 0.645 km^2

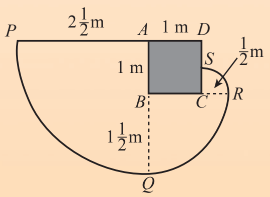
Latih Diri 7.10

1. (a) $x^2 + y^2 - 9 = 0$
   (b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$
   (c) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 32 = 0$
   (d) $x^2 + y^2 + 2x + 12y + 28 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$
3. (a) $x^2 + y^2 + 8x = 0$
   (b) $4x^2 + 4y^2 + 29x + 5y + 26 = 0$
   (c) $5x^2 + 5y^2 + 36x - 56y + 164 = 0$
   (d) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 21 = 0$
4. $5x^2 + 5y^2 + 50x - 6y - 118 = 0$
5. $x^2 + y^2 + 12x = 0$
6. $15x^2 + 15y^2 + 4x - 4 = 0$
7. (a) $x + 2y - 3 = 0$ (b) $5x - 9y + 7 = 0$
   (c) $8x + 10y - 87 = 0$

Latih Diri 7.11

1. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$
2. (a) $x - y - 4 = 0$ (c) $(7, 3), (12, 8)$

Latihan Intensif 7.4

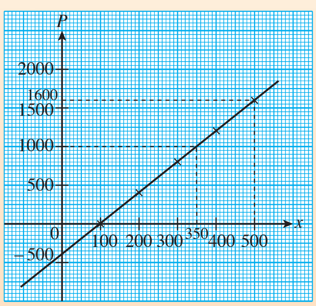
1. (a) $3x^2 + 3y^2 + 12x - 68y + 364 = 0$
   (b) $\left(0, \dfrac{26}{3}\right), (0, 14)$
2. $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$
3. (a) $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 36 = 0$
   (b) 2, 10
4. $y^2 = 4x$
5. (a) $\alpha^2 + \beta^2 = 81$ (b) $4x^2 + y^2 = 36$
6. 

   Lokus terdiri daripada lengkok-lengkok bagi tiga sukuan bulatan:
   (i) APQ iaitu sukuan bulatan berpusat A dan berjejari $2\frac{1}{2}$ m
   (ii) BQR iaitu sukuan bulatan berpusat B dan berjejari $1\frac{1}{2}$ m

(iii) CRS iaitu sukuan bulatan berpusat C dan berjejari $\frac{1}{2}$m

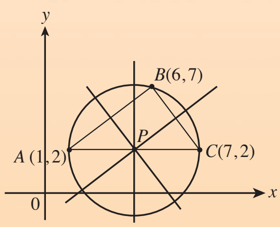
LATIHAN PENGUKUHAN

1. (a) $h = -3, k = 5$ (b) $\frac{2}{5}$
   (c) $2y + 5x = 16$
2. (a) $P(2, 2)$ (b) $y = x$
3. $\frac{1}{2}, 1$
4. $(0, 6), (0, -3)$
5. $2x^2 + 2y^2 + 19x + 35 = 0$
6. $(3, 3)$
7. (a) $C(4, -3)$ (b) $D(8, 7)$
   (c) (i) $k = -\frac{1}{2}$
8. (a) $P(3, 1)$
   (b) QR: $y + 3x = 40$ SR: $3y - x = 10$
   (c) $Q(12, 4), S(5, 5)$ (d) 25 unit^2
9. (a) 30 unit^2
   (b) $\frac{9k - 4h - 1}{2}, 37 - 3k - 2h$ (c) $P(6, 5)$
   (d) $y = x - 1$
   (e) (i) $Q(8, 7)$ (ii) 1 : 1
10. (a) $R(-3, 6), S\left(0, \frac{15}{2}\right), T\left(\frac{15}{8}, \frac{15}{4}\right)$
    (b) $18\frac{9}{32}$ unit^2
11. (a) $h = 1, k = 4$ (b) $y + 2x = 10$
    (c) $y = -2x + 8, y = -2x - 8$
12. (a) $y + 5x + 9 = 0$
    (b) $P(-3, 6), D(7, 8), C(13, 4)$
    (c) 78 unit^2
13. (a) $E(3, 1)$ (b) Segi empat sama
    $B(6, -3)$
14. (a) $P = 4x - 400$
    (b)



(i) RM1 600 (ii) 350 naskhah

15.



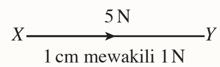
BAB 8 VEKTOR

Latih Diri 8.1

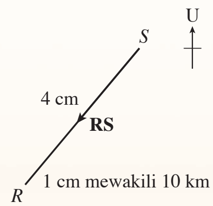
1. (a) Kuantiti skalar kerana kuantiti itu mempunyai magnitud sahaja.
   (b) Kuantiti vektor kerana kuantiti itu mempunyai magnitud dan arah.
   (c) Kuantiti skalar kerana kuantiti ini mempunyai magnitud sahaja.
   (d) Kuantiti skalar kerana kuantiti ini mempunyai magnitud sahaja.
   (e) Kuantiti vektor kerana kuantiti ini mempunyai magnitud dan arah.

Latih Diri 8.2

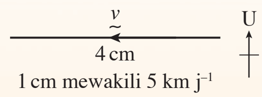
1. (a)



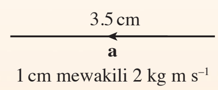
(b)



(c)



(d)



2. $\sqrt{20}$ N, 026.57°
3. 117.15 km
4. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AB}, a = d, c = f, b = e$
5. (a) (i) $\overrightarrow{ED}$ (ii) $\overrightarrow{FE}$
   (iii) $\overrightarrow{AF}$
   (b) (i) $\overrightarrow{DC}$ (ii) $\overrightarrow{CB}$
   (iii) $\overrightarrow{BA}$

Latih Diri 8.3

1. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{x} = -\frac{3}{2}\underset{\sim}{a}, y = -\frac{7}{4}\underset{\sim}{a}, \overrightarrow{RS} = \frac{5}{4}\underset{\sim}{a}$

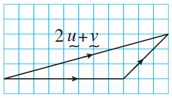
Latih Diri 8.4

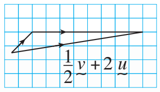
1. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PQ}$
3. (a) $m = -\frac{3}{4}, n = 7$ (b) $m = 4, n = -3$
4. $\overrightarrow{VW} = \frac{7}{2}\overrightarrow{XY}$
5. $k = 4$
6. $\overrightarrow{SR} = -\frac{8}{5}\overrightarrow{QT}$

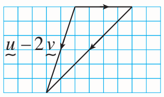
Latihan Intensif 8.1

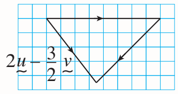
1. $\overrightarrow{AB} = 3\underset{\sim}{u}$
2. (a) 12 cm
   (b) (i) $\overrightarrow{EC} = 2\underset{\sim}{a}$ (ii) $\overrightarrow{BE} = 6\underset{\sim}{b}$
4. $h = -\frac{1}{2}, k = \frac{1}{2}$
5. $k = 4h - 2$

Latih Diri 8.5

1. (a)


(b)


(c)


(d)


2. 131.19°, 106.30 km j^{-1}
3. (a) $\frac{2}{3}\underset{\sim}{y}$ (b) $-\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y}$
   (c) $\frac{1}{3}\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{x}$ (d) $-\frac{2}{3}\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{x}$
4. (a) 578.27 km j^{-1} (b) 345.07°

Latih Diri 8.6

1. $k=\frac{30}{7}$
2. (a) $\overrightarrow{BD}=-24\underset{\sim}{x}+20\underset{\sim}{y}$, $\overrightarrow{AE}=6\underset{\sim}{x}+15\underset{\sim}{y}$

Latihan Intensif 8.2

1. (a) $\underset{\sim}{y}+\underset{\sim}{x}$ (b) $-\underset{\sim}{y}+\underset{\sim}{x}$
   (c) $\underset{\sim}{x}+\frac{1}{2}\underset{\sim}{y}$
2. (a) $3\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y}$ (b) $\underset{\sim}{y}-2\underset{\sim}{x}$
   (c) $-\underset{\sim}{y}+2\underset{\sim}{x}$
3. $-\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}$
4. $h=-10$, $k=23$
5. 6.47 m s^{-1}
6. (a) (i) $-\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{a}$ (ii) $\frac{3}{5}(-\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{a})$
   (iii) $\frac{2}{5}\underset{\sim}{b}+\frac{3}{5}\underset{\sim}{a}$ (iv) $-\underset{\sim}{b}+\frac{3}{4}\underset{\sim}{a}$
   (b) (i) $\frac{2}{5}\lambda\underset{\sim}{b}+\frac{3}{5}\lambda\underset{\sim}{a}$ (ii) $(1-\mu)\underset{\sim}{b}+\frac{3}{4}\mu\underset{\sim}{a}$
   (c) $\lambda=\frac{5}{6}$, $\mu=\frac{2}{3}$

Latih Diri 8.7

1. (a) $\overrightarrow{OA}=2\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j}$, $\overrightarrow{OF}=-8\underset{\sim}{i}$, $\overrightarrow{BC}=-10\underset{\sim}{i}+\underset{\sim}{j}$,
   $\overrightarrow{FA}=10\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j}$, $\overrightarrow{DE}=14\underset{\sim}{i}$, $\overrightarrow{DO}=-\underset{\sim}{j}$
   (b) $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OF}=\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-10\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA}=\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}$,
   $\overrightarrow{DE}=\begin{pmatrix}14\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DO}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$
2. (a) $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$ (b) 8.602 unit
3. (a) (i) $\overrightarrow{AB}=4\underset{\sim}{i}+\underset{\sim}{j}$ (ii) $\overrightarrow{BA}=-4\underset{\sim}{i}-\underset{\sim}{j}$
   (iii) $\overrightarrow{BC}=-\underset{\sim}{i}-5\underset{\sim}{j}$ (iv) $\overrightarrow{DC}=2\underset{\sim}{i}$
   (v) $\overrightarrow{AC}=3\underset{\sim}{i}-4\underset{\sim}{j}$ (vi) $\overrightarrow{AB}=4\underset{\sim}{i}+\underset{\sim}{j}$
   (b) $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{DE}$, kerana mempunyai kecerunan yang sama.
   (c) $\overrightarrow{BA}$ dan $\overrightarrow{DE}$, kerana mempunyai arah bertentangan.
4. (a) $\underset{\sim}{p}=3\underset{\sim}{i}-4\underset{\sim}{j}$
   $\underset{\sim}{q}=-5\underset{\sim}{i}-7\underset{\sim}{j}$
   $\underset{\sim}{r}=\underset{\sim}{i}+5\underset{\sim}{j}$
   (b) $P(3,-4)$, $Q(-5,-7)$, $R(1,5)$
   (c) $|\underset{\sim}{p}|=5$ unit $|\underset{\sim}{q}|=8.602$ unit $|\underset{\sim}{r}|=5.099$ unit

Latih Diri 8.8

1. (a) 3.606 unit (b) 8.062 unit
   (c) $\frac{4}{7}$ unit (d) 13 unit
   (e) 6 unit
2. (a) $\frac{3\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j}}{\sqrt{13}}$ (b) $\frac{-\underset{\sim}{i}-9\underset{\sim}{j}}{\sqrt{82}}$
   (c) $\underset{\sim}{i}$ (d) $\frac{-8\underset{\sim}{i}-15\underset{\sim}{j}}{17}$
3. (a) Vektor unit (b) Vektor unit
   (c) Vektor unit (d) Bukan vektor unit
4. (a) ±1 (b) ±1
   (c) 0 (d) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
   (e) ±0.866 (f) ±0.988
5. $p=\pm3$
6. $h=\pm\sqrt{2k-k^2}$

Latih Diri 8.9

1. (a) $\begin{pmatrix}-9\\30\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}16\\-47\end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix}12\\-13\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}7\\16\end{pmatrix}$
2. (a) $10\underset{\sim}{i}+18\underset{\sim}{j}$ (b) $2\underset{\sim}{i}+6\underset{\sim}{j}$
   (c) $-7\underset{\sim}{i}-26\underset{\sim}{j}$ (d) $5.5\underset{\sim}{i}+20\underset{\sim}{j}$

Latih Diri 8.10

1. $\begin{pmatrix}2\\-9.5\end{pmatrix}$
2. Bot $A=\begin{pmatrix}30\\15\end{pmatrix}$, Bot $B=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$
   Kedua-dua bot tidak akan bertembung.

Latihan Intensif 8.3

1. (a) $\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$ (b) 8.544 N
2. $k=10$ atau 1
3. $m=\frac{23}{3}$, $|\underset{\sim}{u}|:|\underset{\sim}{v}|=9:16$
4. (a) $\overrightarrow{BC}=8\underset{\sim}{i}+6\underset{\sim}{j}$ (b) $\frac{4\underset{\sim}{i}+3\underset{\sim}{j}}{5}$
   (c) $\overrightarrow{AR}=6\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j}$
5. 2.96 km j^{-1}, 101.69°
6. (a) 4, −8 (b) $\frac{6}{5}$
   (c) 4
7. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ atau $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
8. $-2\sqrt{5}\,\underset{\sim}{i}+\sqrt{5}\,\underset{\sim}{j}$
9. $m=\frac{4-n}{4}$
10. (a) $(50-4t)\underset{\sim}{i}+(20+4t)\underset{\sim}{j}$
    (b) Selepas 5 jam

LATIHAN PENGUKUHAN

1. (a) $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$ (b) $\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{c}$
2. $-\dfrac{2}{3}$
3. $m = \sqrt{1 - n^2}$
4. $h = \dfrac{2k + 17}{8}$
5. (a) $\dfrac{15\underset{\sim}{i} + 9\underset{\sim}{j}}{\sqrt{306}}$ (b) $C(18, 13)$
6. $\overrightarrow{RS} = \dfrac{2}{5}(3\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j})$
7. $\overrightarrow{BC} = 2(\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v})$
8. (a) (i) $-\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$ (ii) $\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}$
   (iii) $2(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a})$ (iv) $\underset{\sim}{b} - 2\underset{\sim}{a}$
   (v) $2\underset{\sim}{b} - 3\underset{\sim}{a}$ (vi) $2(\underset{\sim}{b} - 2\underset{\sim}{a})$
   (b) $\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{FC}$ (c) Selari
9. (a) $\begin{pmatrix} 20 \\ -21 \end{pmatrix}$ (b) 29 km
   (c) $\begin{pmatrix} 30 \\ -32 \end{pmatrix}$
10. (a) (i) $6\underset{\sim}{u}$ (ii) $6\underset{\sim}{u} + 2\underset{\sim}{v}$
    (b) (i) $9\underset{\sim}{u} + 3\underset{\sim}{v}$ (ii) $9\underset{\sim}{u} + (2 + 3k)\underset{\sim}{v}$
    $k = \dfrac{1}{3}$
11. (a) (i) $4\underset{\sim}{a} + 4\underset{\sim}{c}$ (ii) $3\underset{\sim}{a} + 3\underset{\sim}{c}$
    (iii) $4\underset{\sim}{a} + 6\underset{\sim}{c}$ (iv) $\underset{\sim}{a} + 3\underset{\sim}{c}$
12. (a) Halaju paduan bot Arul ialah $4\underset{\sim}{i} + \dfrac{4}{3}\underset{\sim}{j}$
    Halaju paduan bot Ben ialah $7\underset{\sim}{i} + \dfrac{7}{3}\underset{\sim}{j}$
    Beza laju ialah 3.163 m s^{-1}
    (b) $\dfrac{3\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}}{\sqrt{10}}$

BAB 9 PENYELESAIAN SEGI TIGA

Latih Diri 9.1

1. (a) $\dfrac{p}{\sin P} = \dfrac{q}{\sin Q} = \dfrac{r}{\sin R}$
   (b) $\dfrac{k}{\sin K} = \dfrac{l}{\sin L} = \dfrac{m}{\sin M}$
   (c) $\dfrac{6}{\sin 40°} = \dfrac{8}{\sin 120°}$

Latih Diri 9.2

1. (a) 5.611 cm (b) 52.29°
   (c) 9.331 cm
2. 55.34 m

Latih Diri 9.3

1. (a) Wujud kes berambiguiti.
   (b) Tidak wujud kes berambiguiti.
2. (a) 57.86° atau 122.14°
   (b) 7.112 cm atau 18.283 cm

Latih Diri 9.4

1. 10.147 m
2. 41.224 m

Latihan Intensif 9.1

1. $\angle A = 64°$, $a = 37.359$ cm, $c = 26.158$ cm
2. (a) $BE = 8$ cm, $CE = 6$ cm, $DE = 15$ cm
   (b) $\angle EAB = 53.13°$, $\angle BCE = 53.13°$, $\angle BCD = 126.87°$, $\angle ABD = 81.20°$, $\angle CBD = 25.06°$
   (c) Segi tiga BDC dan segi tiga BDA mempunyai sudut dan dua panjang sisi yang sama saiz.
3. (a) $\angle PQR = 120°$ (b) 5.529 cm
4. 61.62 cm
5. 138.58 m

Latih Diri 9.5

1. (a) 3.576 cm (b) 18.661 cm
   (c) 53.891 m
2. (a) 51.38° (b) 35.26°
   (c) 99.06°
3. 69.93°

Latih Diri 9.6

1. 29.614 m
2. 41.832 m
3. 48.046 km

Latihan Intensif 9.2

1. 4.071 cm, 6.475 cm
2. 11.555 km
3. 46.50°
4. 23.974 m

Latih Diri 9.7

1. (a) 112.48 cm^2 (b) 28.67 cm^2
   (c) 75.21 cm^2
2. 27.08 cm
3. 51.23 cm^2
4. 18.15 m^2

Latih Diri 9.8

1. 16.14 cm^2
2. 17.69 cm^2
3. 2

Latih Diri 9.9

1. 251.72 m^2
2. 66.17 cm^2

Latihan Intensif 9.3

1. (a) 6 cm (b) 6 cm^2
2. 43.012 cm^2
3. 7.501 cm atau 17.71 cm
4. 107.98 cm^2
5. 89.23 cm^2
6. 14.66 cm

Latih Diri 9.10

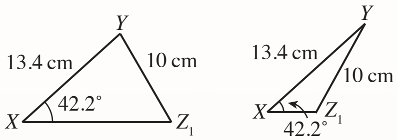
2. (a) 19.52 cm (b) 115.87 cm^2
3. 98.13°, 3.5 unit^2

Latihan Intensif 9.4

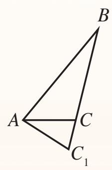
1. (a) 40.20 cm^2 (b) 125.63°
2. 9.266 km
3. (a) 31.24 cm^2 (b) Satah DBR
4. 31.46 km, 187.11°
5. 457.80 m

LATIHAN PENGUKUHAN

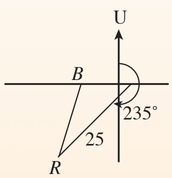
1. (a) $a = 6.504$ cm, $b = 5.239$ cm
   (b) $\angle P = 105.03°$, $\angle Q = 49.92°$, $\angle R = 25.05°$
2. (a) 6.756 cm (b) 7.287 cm
3. (a) 13.82 cm (b) 33.39 cm^2
4. (a)



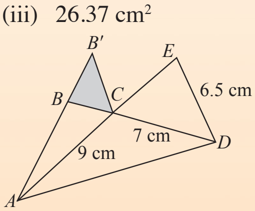
   (b) 64.17°, 115.83° (c) 25.07 cm^2
5. (a) 5.903 cm (b) 42.66°
6. (a) 37.59° (b) 14.31 cm^2
7. (a) 118.9° (b)



   (c) 5.142 m
8. (a) 40° (b) 3.875 cm
   (c) 5.763 cm^2
9. (a)



   (b) 13.38 km
   (c) (i) 14.20 km (ii) 153.36°
10. (a) (i) 58.28 km (ii) 58.76°
    (iii) 2535.79 km^2
    (b) Stesen minyak *M* (c) 63.40 km
11. (a) (i) 124.35° (ii) 6.943 cm
    (iii) 26.37 cm^2
    (b)



12. (a) $\dfrac{10}{33}$ (b) 17.76 cm^2, 8.881 cm
    (c) Segi tiga ZXY' dengan keadaan XZ kekal, $XY' = XY$, $\angle XZY' = \angle XZY$
    Segi tiga ZXY' dengan keadaan XZ kekal, $ZY' = ZY$, $\angle ZXY' = \angle ZXY$

BAB 10 NOMBOR INDEKS

Latih Diri 10.1

1. $I = 82.20$
   Penurunan bilangan kenderaan komersial berdaftar sebanyak 17.80% pada tahun 2017 berbanding tahun 2015.
2. $I = 112.72$
   Peningkatan purata perbelanjaan bulanan isi rumah sebanyak 12.72% pada tahun 2017 berbanding tahun 2014.
3. 650 053 107 tan metrik
4. 150
5. 94.48

Latih Diri 10.2

1. 112
2. 104.76

Latihan Intensif 10.1

1. $I = 108.3$
   Peningkatan purata suhu di bandar *P* sebanyak 8.3% pada bulan Februari 2017 berbanding bulan Januari 2017.
2. $I = 92.31$
   Penurunan harga bagi sejenis item sebanyak 7.69% pada tahun 2015 berbanding tahun 2012.
3. $x = 0.5$, $y = 2.80$, $z = 125$
4. $p = 100$, $q = 131.90$, $r = 134.48$
   $s = 125.86$
5. 107.27

Latih Diri 10.3

1. 105
2. 114

Latih Diri 10.4

1. (a) $I_A = 150$, $I_B = 104$, $I_C = 120$, $I_D = 124$
   (b) 121
   Terdapat peningkatan sebanyak 21% bagi harga semua barangan pada tahun 2016 berbanding tahun 2010.
   (c) RM2.19
2. (a) $a = 115$, $b = 150$, $c = 112.5$, $d = 33$
   (b) 126.68 (c) RM44.34
   (d) 110

Latihan Intensif 10.2

1. (a) 124
2. 93
3. 76.4
4. (a) 130 (b) 132
   (c) RM25.74

LATIHAN PENGUKUHAN

1. (a) $x = 1.00$, $y = 1.00$, $z = 110$
   (b) 112.5
2. $m = 121$, $n = 122$
3. (a) RM9.12 (b) 35 000
   (c) 90.4%
4. (a) 64.12 (b) 0.935 juta tan
   (c) 87.15
5. (a) RM 15 (b) 187.5
6. (a) 4 (b) 105.25
7. (a) 133.03
8. $p = 140$, $q = 130$, $r = 255$
9. (a) 6.14 juta
   (b) 166.85
   Bilangan pelawat pada tahun 2020 meningkat 66.85% berbanding tahun 2017.
10. $x : y : z = 1 : 4 : 3$
11. (a) $P_{2014} = \text{RM}150.91$, $P_{2010} = \text{RM}188.64$
    (b) 12%
12. (a) 115 (b) RM198.38

GLOSARI

Asas (*Base*) Jika a ialah suatu nombor dan ditulis dalam bentuk kuasa, contohnya a^n, maka a ialah asas.

Beza sepunya (*Common difference*) Pemalar yang ditambah kepada sebutan sebelumnya untuk membentuk satu janjang aritmetik.

Domain (*Domain*) Set unsur yang dipetakan kepada set unsur yang lain melalui satu hubungan.

Fungsi (*Function*) Satu hubungan khas dengan setiap objek dalam domain dihubungkan dengan hanya satu imej dalam kodomain.

Fungsi diskret (*Discrete function*) Fungsi dengan titik-titik pada graf ialah titik nyata yang terpisah dan tidak bersambung dengan garis atau lengkung.

Fungsi gubahan (*Composite function*) Fungsi yang menggabungkan dua atau lebih fungsi.

Fungsi kuadratik (*Quadratic function*) Fungsi dalam bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b dan c ialah pemalar dan $a \neq 0$.

Fungsi satu dengan satu (*One to one function*) Fungsi dengan setiap objek dalam domain mempunyai hanya satu imej dalam kodomain.

Fungsi selanjar (*Continuous function*) Fungsi dengan titik-titik pada graf yang disambungkan dengan garis atau lengkung dalam selang tertentu.

Fungsi songsang (*Inverse function*) Fungsi yang memetakan setiap imej dalam fungsi itu kepada objeknya.

Garis lurus penyuaian terbaik (*Best-fit straight line*) Garis lurus terbaik yang dilukis daripada titik-titik yang tidak menghasilkan garis lurus yang sempurna.

Garis selari (*Parallel line*) Dua atau lebih garis yang mempunyai kecerunan yang sama.

Garis serenjang (*Perpendicular line*) Dua garis yang bersilang antara satu sama lain pada sudut tegak.

Indeks (*Index*) Jika a ialah suatu nombor, n ialah suatu integer positif dan a^n, maka n ialah indeks.

Indeks harga (*Price index*) Ukuran statistik yang digunakan untuk menunjukkan perubahan harga pada masa tertentu.

Janjang (*Progression*) Urutan nombor atau jujukan yang terbentuk dengan menambah atau mendarab satu pemalar kepada sebutan sebelumnya (kecuali sebutan pertama).

Julat (*Range*) Subset bagi kodomain yang mengandungi semua imej yang telah dipetakan oleh objek dalam domain.

Kes berambiguiti (*Ambiguous case*) Dua segi tiga boleh dilukis menggunakan satu set maklumat yang sama.

Ketaksamaan kuadratik (*Quadratic inequality*) Ketaksamaan dengan satu ungkapan kuadratik dalam satu pemboleh ubah di sebelah dan sifar di sebelah yang satu lagi.

Konjektur (*Conjecture*) Ramalan yang belum dibuktikan tetapi kelihatan benar. Jika terdapat bukti yang mencukupi, ramalan itu akan menjadi teorem atau formula.

Kodomain (*Codomain*) Set unsur yang sebahagiannya dipetakan daripada set unsur domain.

Kuantiti vektor (*Vector quantity*) Kuantiti yang mempunyai magnitud dan arah.

Kuasa (*Power*) Jika a ialah suatu nombor dan n ialah suatu integer positif, maka a^n ialah suatu nombor kuasa dan disebut a kuasa n.

Logaritma (*Logarithms*) Logaritma suatu nombor positif N kepada asas a yang positif ialah indeks bagi a, iaitu jika $N = ax$, maka $\log_a N = x$.

Lokus (*Locus*) Titik yang bergerak dengan lintasan yang dilalui oleh titik itu mengikut syarat yang ditetapkan.

Magnitud vektor (*Vector magnitude*) Panjang, besar atau saiz suatu vektor.

Nisbah sepunya (*Common ratio*) Pemalar yang didarab kepada sebutan sebelumnya untuk membentuk satu janjang geometri.

Nombor indeks (*Index number*) Nombor yang menunjukkan ukuran perubahan suatu kuantiti pada masa tertentu.

Pemberat (*Weightage*) Nilai yang mewakili kepentingan relatif bagi item yang berbeza.

Pemboleh ubah (*Variable*) Suatu kuantiti yang nilainya tidak diketahui dan tidak tetap.

Persamaan kuadratik (*Quadratic equation*) Persamaan dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b dan c ialah pemalar dan $a \neq 0$.

Persamaan linear (*Linear equation*) Persamaan yang memenuhi $y = mx + c$ dan membentuk garis lurus.

Persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah (*Linear equation in three variables*) Persamaan dalam bentuk $ax + by + cy = d$, dengan a, b dan c ialah pemalar dan bukan sifar.

Persamaan serentak (*Simultaneous equation*) Dua atau lebih persamaan yang mempunyai penyelesaian sepunya.

Persamaan tak linear (*Nonlinear equation*) Persamaan dengan kuasa tertinggi pemboleh ubah lebih daripada satu.

Punca (*Root*) Nilai pemboleh ubah yang memuaskan suatu persamaan.

Rumus Heron (*Heron formula*) Rumus yang digunakan untuk mencari luas segi tiga apabila ketiga-tiga panjang sisi diketahui.

Satah (*Plane*) Permukaan rata yang terdiri daripada satah mengufuk, satah mencancang dan satah condong.

Sebutan (*Term*) Nombor-nombor yang membentuk satu urutan nombor atau jujukan nombor.

Sudut kandung (*Included angle*) Sudut yang tercangkum di antara dua sisi.

Tahun asas (*Base year*) Tahun yang dipilih sebagai permulaan bagi pengiraan satu siri nombor indeks, biasanya tahun yg mempunyai ciri normal.

Tangen (*Tangent*) Suatu garis lurus yang menyentuh suatu lengkung pada satu titik sahaja.

Tembereng garis (*Line segment*) Sebahagian daripada garis yang menyambungkan dua titik hujung.

Titik terminal (*Terminal point*) Titik hujung pada tembereng garis yang mewakili suatu vektor.

Ujian garis mencancang (*Vertical line test*) Garis mencancang yang digunakan untuk menentukan sama ada graf suatu hubungan ialah fungsi atau bukan.

Ujian garis mengufuk (*Horizontal line test*) Garis mengufuk yang digunakan untuk menentukan sama ada suatu fungsi adalah fungsi satu dengan satu atau bukan.

Vektor paduan (*Resultant vector*) Vektor tunggal yang terhasil daripada gabungan antara dua atau lebih vektor.

Vektor selari (*Parallel vector*) Dua vektor adalah selari jika satu vektor ialah gandaan skalar bagi vektor yang satu lagi.

Vektor sifar (*Zero vector*) Vektor yang bermagnitud sifar dan arahnya tidak dapat ditentukan.

Vektor unit (*Unit vector*) Vektor dengan magnitud bernilai satu unit pada suatu arah tertentu.

Verteks (*Vertex*) Titik minimum atau maksimum suatu parabola.

SENARAI RUJUKAN

Chow W. K. (2013). *Discovering Mathematics* (2nd ed.). Singapore: Star Publishing Pte Ltd.

Greenwood, D., Robertson, D., Woolley, S., Goodman, J. & Vaughan, J. (2017). *Essential Mathematics for the Australian Curriculum Year 10*. Australia: Cambridge University Press.

Thomas, E. J. & Brunsting, J. R. (2010). *Styles and Strategies for Teaching Middle School Mathematics*. USA: Corwin Press.

Ho, S. T. & Khor, N. H. (2001). *New Additional Mathematics*. Singapore: SNP Panpac Pte Ltd.

Istilah Matematik untuk Sekolah-sekolah Malaysia (2003). Kuala Lumpur, Malaysia: Dewan Bahasa dan Pustaka.

Yeo, J., Keng, S. T., Cheng, Y. L & Chow, I. (2013). *New Syllabus Additional Mathematics* (9th ed.). Singapore: Shinglee Pte Ltd.

Rondie, P. L., Kemp, E., Buchanan, L., Fensom, J. & Stevens, J. (2012). *Oxford IB Diploma Programme: Mathematics Standard Level Course Companion*. UK: Oxford University Press.

Lim, L. N. (2007). *GCE O Level Additional Mathematics Key Points Exam Guide*. Singapore: Redpost Publications Pte Ltd.

Sullivan, M. (1996). *Algebra & Trigonometry* (4th ed.). USA: Prentice Hall, Inc.

Allen, R. G. D. (1975). *Index Numbers in Economic Theory and Practice*. USA: Transaction Publishers.

O'Neill, R., Ralph, J. & Smith, P. A. (2017). *Inflation: History and Measurement*. UK: Palgrave Macmillan.

Barret, R. (2008). *NCEA Level 2 Mathematics Year 12*. New Zealand: ESA Publications (NZ) Ltd.

Pemberton, S. (2016). *Cambridge IGSCE and O Level Additional Mathematics Coursebook*. UK: Cambridge University Press.

Afriat, S. N. (2014). *The Index Number Problem: Construction Theorems*. UK: Oxford University Press.

Zaini Musa, Abdul Rahim Mohd Idris & Tee, H. T. (2011). *Matematik Tambahan Tingkatan 4*. Shah Alam: Cerdik Publications Sdn. Bhd.

INDEKS